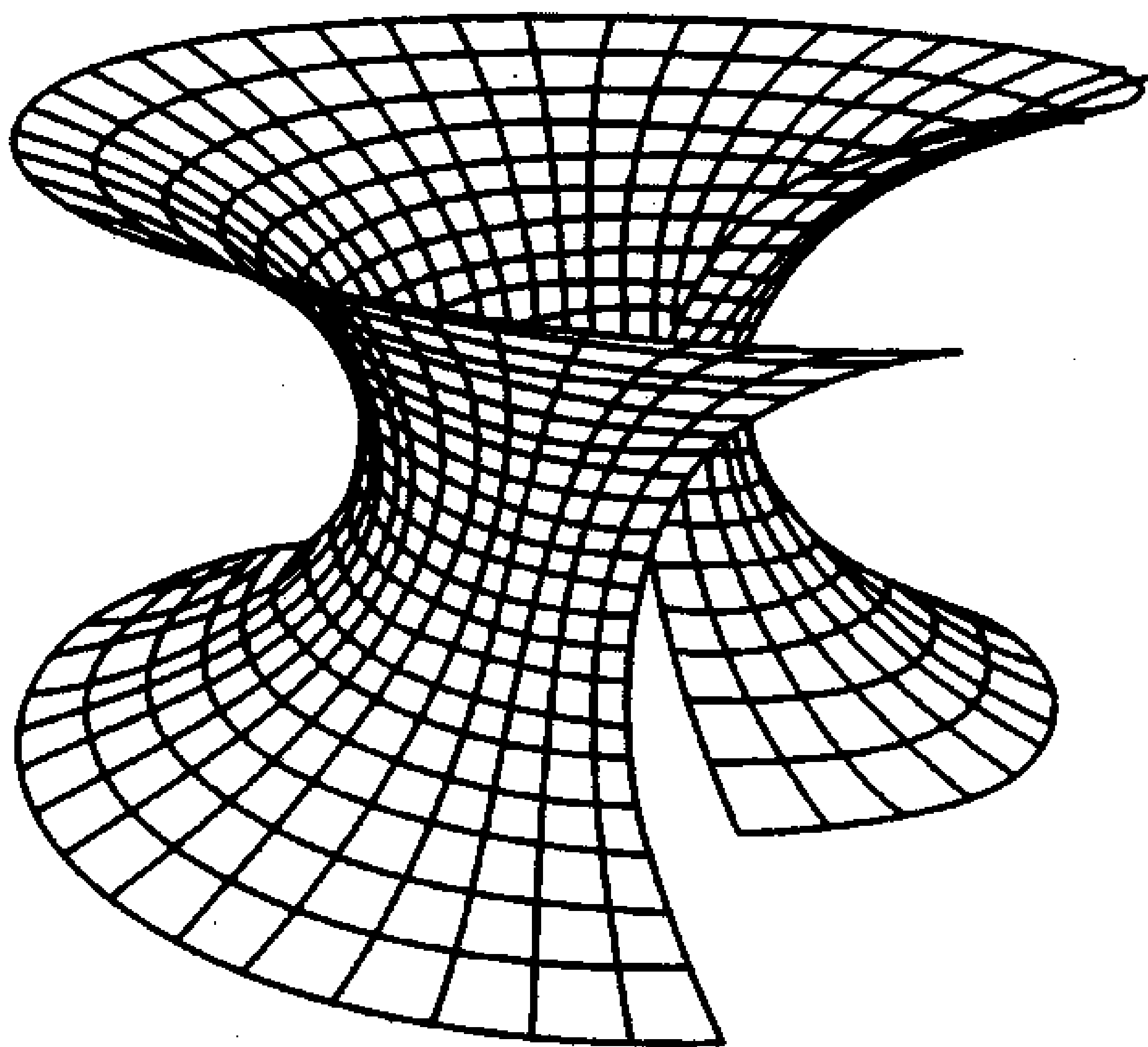
拓扑实验

[美] 斯蒂芬·巴 尔著 许 明译 ● 上海教育出版社



VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

Stephen Barr

Experiments in Topology

Dover Publications, Inc.

©1964 by Stephen Barr

根据多佛出版社 1989 年版译出

本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

图书在版编目（C I P）数据

拓扑实验／（美）巴尔著；许明译．—上海：上海教育出版社，2002.1
（通俗数学名著译丛／史树中，李文林主编）
ISBN 7-5320-7862-0

Ⅰ.拓...　Ⅱ.①巴...②许...　Ⅲ.拓扑
Ⅳ.O189

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第005617号

通俗数学名著译丛

拓扑实验

［美国］斯蒂芬·巴尔 著

许 明 译

上海世纪出版集团
上 海 教 育 出 版 社 出版发行

（上海永福路 123 号　邮政编码：200031）

易文网：www.ewen.cc

各地新华书店经销　上海书刊印刷有限公司印刷

开本 850×1156　1/32　印张 5.25　插页 4　字数 118,000

2002 年 2 月第 1 版　2002 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—5,150 本

ISBN 7-5320-7862-0/G·7959　定价：（软精）11.40 元

开創新世紀的
数學文化

陳省身
二千年十一月

译丛序言

数学，这门古老而又常新的科学，已阔步迈进了21世纪.

回顾过去的一个世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志.因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要，在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面，20世纪数学思想的深刻变革，已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只好望而却步.这样，提高数学的可接受度，就成为一种当务之急.

一般说来，一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步，数学普及工作在我国也受到重视.早在60年代，华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物，激发了一代青少年学习数学的兴趣，影响绵延至今.改革开放以来，我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说，我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一

个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的宏伟工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气.在这样的情况下,上海教育出版社按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作,同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见.值得高兴的是,这项工作从一开始就得到了数学界许多人士的赞同与支持,特别是数学大师陈省身先生两次为丛书题词,使我



们深受鼓舞.到目前为止,这套丛书已出版了13种,印数大多逾万,有的已经是第四次印刷,这对编译者来说确是令人欣慰的信息.我们热切希望广大读者继续关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》的出版获得更大的成功.

让我们举手迎接数学科学的新的黄金时代,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

2001年8月

献　词

数学家们不落俗套的风格
以美妙的托词避开了通用的言语；
读者一定要学会他们的语言，因为
它能迷倒崇尚比喻想法的人并带来因
这种思想引起的狂喜.
数字们紧密地站成一排
给出了拓扑空间，就像是
花园里一群雨燕的飞翔表达了
对逻辑的敬意.然而燕子知道
下不是上.拓扑学家却不知
东南西北也不管上还是下.
他们每个人都有独到之处，并非他们宁愿
傲慢和浮夸而把学习撇在一旁.

致　谢

插图由 A·摩根(Ava Morgan)所绘制.

我要感谢《趣味数学杂志》的编辑 J·玛达奇(Joseph Madachy),还有《科学美国人》的编辑们,他们允许复印了本书的一些难题.

特别要感谢 M·加德纳(Martin Gardner),是他建议我写这本书的,也要感谢 M·波依德(Milton Boyd),他教会了我这方面的知识.

还要感谢 J·麦克勒兰(John McClellan),H·S·M·考克斯特(H.S.M.Coxeter)教授,R·宾(R.Bing)教授,感谢他们给予我的帮助和支持.

目 录

第 1 章　什么是拓扑学? …… 1
欧拉定理 …… 6
第 2 章　新的曲面 …… 14
可定向性 …… 17
维数 …… 19
另外两个曲面 …… 21
克莱因瓶 …… 23
第 3 章　最短麦比乌斯带 …… 27
第 4 章　圆锥麦比乌斯带 …… 34
第 5 章　克莱因瓶 …… 44
第 6 章　射影平面 …… 56
对称性 …… 60
第 7 章　地图着色问题 …… 78
第 8 章　网络 …… 86
哥尼斯堡桥 …… 86
贝蒂数 …… 88
纽结 …… 94
第 9 章　有关带孔环面的审讯 …… 97
第 10 章　连续性与离散性 …… 106
"下一个数" …… 106
连续性 …… 107

邻域 …… 109
极限点 …… 112
第11章 集合 …… 114
逻辑真实还是单纯的真理 …… 114
维恩图 …… 115
开集和闭集 …… 123
变换 …… 128
映射 …… 132
同伦 …… 135
结论 …… 139
附录 …… 141
索引 …… 147
关于本书 …… 151

第1章　什么是拓扑学?

拓扑学是相当新的一个数学分支,而要在数学中谈到实验似乎就有点古怪——除非,譬如说,你正站在学科的第一线并希望做出一些新贡献;但这里我们只假定读者们对这门学科一无所知.或许正因为它是相当新的分支,我们虽不能在顶上面——倒也可以从侧面做些添枝加叶的事.同时也可以做一些实验,尽管由此并不会添加什么新东西,却可以帮助你了解这门难以捉摸的学科.

要给拓扑学下个定义是出奇地难,相比较而言,对下面一些学科则要容易得多.算术:“正实数的科学”(《韦氏新大学字典》),或者,“处理数量间数值关系的一门艺术”(《不列颠大百科全书》第11版).代数:“算术的推广与扩充”(《不列颠大百科全 【1】
书》第11版).马克·巴尔(Mark Barr)说,数学是“当我们冷静地考察事物间关系时,设法将它们置于暂时待定状态”,它特别可用到代数上.几何:“对空间(数学)性质的研究”(《不列颠大百科全书》第11版).拓扑学最初是以一种几何形式出现的,后来却伸展到了许多其他的数学领域.人们几乎可以说它是一种精神境界,有它自身目标的那种境界.(后文中我们会看到最后这短语确有其拓扑意义.)

从某种意义上说,拓扑学是研究连续性的:开始是研究空间或形状的连续性,而后加以推广,然后以类比的方式引进其他各种连续性——我们通常所理解的空间则被远远地抛在后面了.

那些真正思想高度活跃的拓扑学家不仅避免像这些东西的图形之类的，也根本就不信任它们．部分原因是某些他们所谓的“空间”不但不可能作出在视觉上可以辨认的图形，而且这样做根本就毫无意义．但是，如果我们从一些我们可以看到和感觉到的空间或形状出发，以拓扑学家的观点来观察，并通过简单的步骤，就能够对我们的目标有所了解．

[2] 拓扑学家感到兴趣的事物的几何性质是那些最为持久不变的东西，即那些能在扭曲和拉伸后仍能保持的性质．

一个圆圈的圆度显然不属于此列：你可以把一段绳线两端结起来或粘起来做成一个圆，同时也可在不切开或断开的情形下把它变成一个方形．但是它没有端点这个事实仍然保持不变，如果我们事先在它上面穿好一串标有数字的珠子，则它们会保持顺序不变，哪怕我们把它打成纽结也行，这时只要我们像一只爬行的小虫，顺着线去数它们，便能得到证实(图 1)．如果用松紧带去替代绳线，其结果仍然如此，因为改变的仅仅是珠子间的距离而不是它们的顺序．

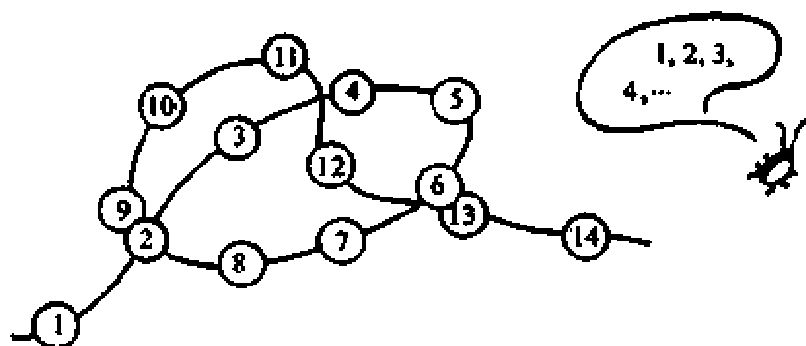


图 1

我们在射影几何中遇到相同的情形：直线的投影为直线，三角形的投射为三角形，但其角度可取任何值，甚至在它自身角度

[3] 改变时也如此．虽然在拓扑学中直线不必保持为直线，但它保持了沿自身连续不断地连通这个性质，其两个端点或断开或相连，依情况而定．(如果线被画在球面上而且在沿它爬行的小虫看来

它是直的，它会报告说，此线不偏不倚，像是球面的赤道.这属于后一种可能性.)拓扑学紧紧抓住的就是这个连通性，这个连续性.正因为如此，扭曲只有在不断开原来连通的地方才被允许进行(像切开或戳洞)，也不允许连接原来不连通的地方(像连接原来断开线的两端，或是填满一个洞).

依此规则，我们取一团圆形黏土；可以把它做成一只杯子但不能给它装一个把柄，这是因为把柄上有个洞.但是我们却能够从一块炸面圈形的黏土块做成一只带柄的杯子(图 2).

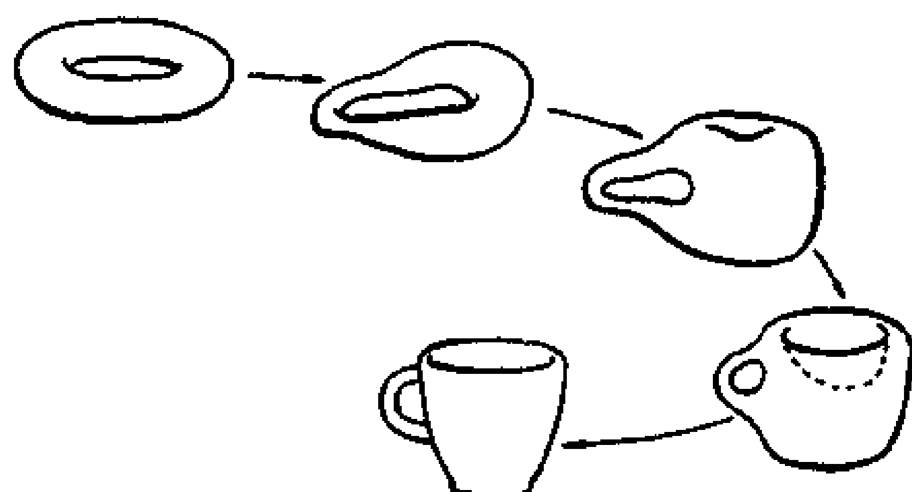


图 2 [4]

更明确地说：只要剖开之后又把它重新连接上，我们就允许剖开这种形变.例如，一些拓扑学家说，可以把图 3 中线圈的第一种布局在不改变其连通性的情形下，经过变化或扭曲转化为第二种布局.这两种布局确实都以相同的方式连通，但显然我们不能在不切断也不黏合的条件下做到这种转化——然而这种转化是允许进行的.有些人说，可以在 4 维空间中做到它，但是，或

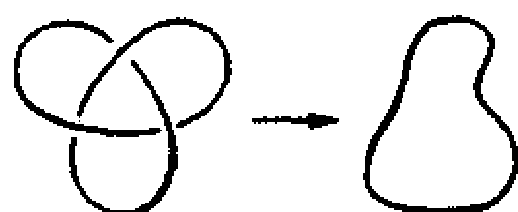


图 3

许在这个例子中，只要对不切不黏规则作点修订就更加清楚明白些：只要经形变的最后结果中的连通性与原来的连通方式一样，则任何形变都被允许.

这个规则的另一个例子是，你不能从一片炸面圈形的块状物做出一只不带空洞的碟子来.前者有时也称作环体.像具有或不具有空洞这些特性被称为拓扑不变性.有时会发现一个不变性原来只是另一个的推论，但是现在我们还无需强调它.

[5] 没有空洞的一块黏土称之为单连通的，我们发现它有如下结果，即如果我们在这黏土块上画一个圆圈或是任一条闭曲线(图 4)，它将整个表面分成两块：内部和外部，这跟在纸上画圈是一样的.球面上的赤道线也有这个特性，只是很难说哪一个是"内部"，哪一个是"外部"；不管怎样，它至少把表面分成了两部分.



图 4

现在，如果我们画上另一个圆圈，则它与第一个圆要么完全不切割或相交，要么切割或相交于两处.这里切割的意思是完全穿过而不是像图 5 中的两个圆那样仅仅相接触.这是因为当我们从第一个圆外面的一点出发画第二个圆时，需要穿越到内部；除非我们再次穿越第一个圆，否则我们就不能返回外部来使新
[6] 画的线与出发点相连，从而画完新的圆.先从内部出发也是一样的情形.



图 5

现在考察环体(炸面圈,图 6)的情形.先画出 L 线.可以看到,它并没有把整个表面分成两部分,从而,如果我们从任意点 P 出发画第二个圆,则点 P 既不在圆 L 的内部也不在外部.因此,当我们跨过 L,我们所作的虚线并没有被 L 所阻挡,不让它回到 P 点.正如图中所示,我们可以找到两个圆,它们只交于一个点.这个事实对于没有空洞的单连通曲面不成立,但对任意一个具有一个空洞的曲面都对;它是拓扑不变的.

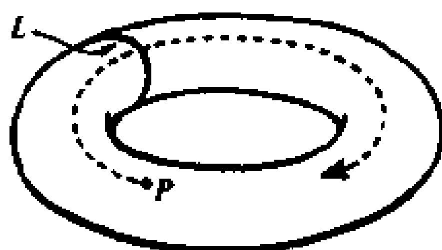


图 6

像前面所指出的,一个环体可形变为带有一个洞的各种形状;同时,一个圆除了它叠合到一条无限伸展的曲线外,它总可形变为任一条处处不自交的闭曲线.后一种称之为约当(Jordan)曲线,因为是这位数学家证明了:如果这些曲线是在单连通 [7]
曲面上,例如在平面或球面上,则它们将曲面分成不同的两个区域,这两个区域没有公共点,但以此曲线作为它们的公共边界.这个结论似乎很明显,但是证明起来却出乎意料地困难.在环体表面上也可画出一条把曲面分成两部分的约当曲线来,这只要它不环绕那个空洞也不要像图 6 中那条曲线那样从头至尾地穿越就可以做到.但是在平面或球面上所有的约当曲线都把曲面一分为二,而在环体表面并非一定如此.当一个形状或曲线按我们的规则形变成另一个时,我们就说它们相互同胚.

如果在一块黏土上画一个三角形,可以相信,我们能够同胚地经过形变把它的三个角去掉,并把它变为一个圆;但是如果我们在线上已标出一些点或者就把顶点当作这些标出点,则这些点在形变中仍旧在曲线上并且保持同样的顺序(按逆时针数

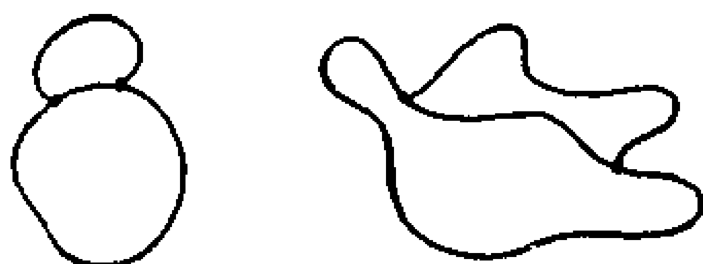


图 7

序).另外,如果我们画出图 7,它是一条闭曲线与另外一条曲线
在两个不同的点相连接的图形;没有一个按我们规则进行的形
[8] 变能改变对这个图形的描绘.不仅这两个连结点仍保持为连结
点,而且不会有新的连结点出现,因为那意味着有一个新的连
接.因此,一个球面及其赤道,加上另外一条与赤道在点 P 及 P'
相连的曲线的图形(图 8)不可能在形变下使这些曲线的布局在
拓扑上有所改变(图 9 和 10).

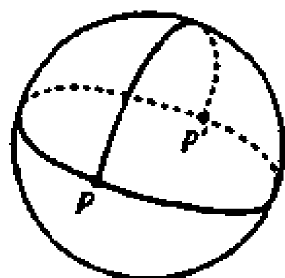


图 8

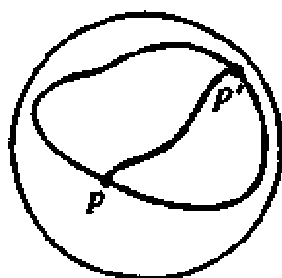


图 9

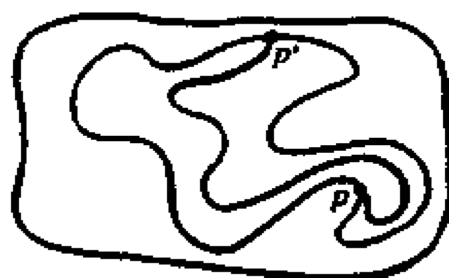


图 10

图 9 表示整个曲线的布局都拉到了一边并弯曲成随意的形
状.(只要遵守规则,可以在曲面上进行形变.)我们看到,它仍旧
把此曲面分成三块;它仍旧由三段曲线构成,而且它们仍旧交于
[9] 两个不同的点.这些就是拓扑学家们所关心的事实.

欧拉定理

拓扑不变量的主要例子来自瑞士数学家伦纳德·欧拉(Leonhard Euler)在 1752 年所陈述的一个定理.它与多面体有

关;多面体是立体的几何图形,像立方体或四面体之类(图 11),即由平面(面)围成的立体,它有直线的边,边交成点或顶角,称之为顶点.可以有更加复杂并具有你想要的任意面数的多面体;但是,面数绝不能少于四面体的面数——4 面.欧拉证明,不管多面体多么复杂,如果把它面的个数加上顶点的个数再减去边的条数,你所得到的答案总是 2.

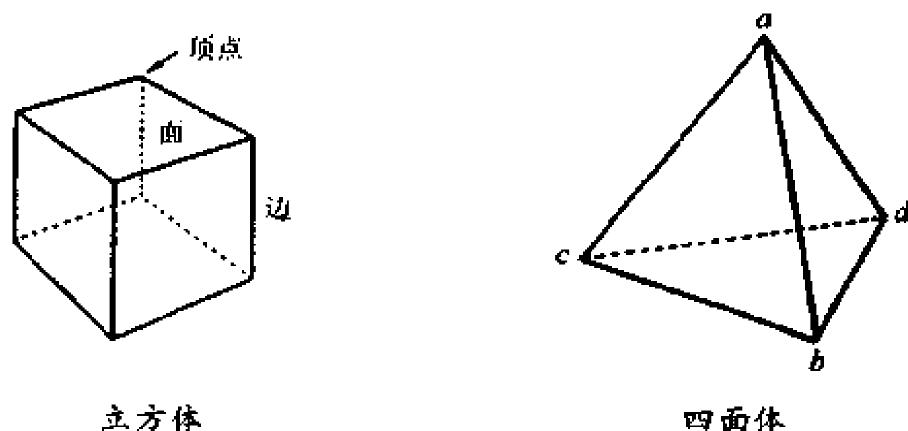


图 11

我们不打算直接给出它的证明,而是要把这个规律按拓扑
的方式加以进一步推广.其证明自然要包括欧拉定理的证明,而 [10]
且它出乎意料地更容易弄懂.首先,请记住:在拓扑学中我们可以弯曲直线;让我们在球面上画出一个四面体(图 12).我们依旧有(请将它与图 11 比较)4 个面(不再是平坦的而是凸出来了),6 条边(现在是弯曲的),和 4 个顶点.依欧拉的规律:4 个面

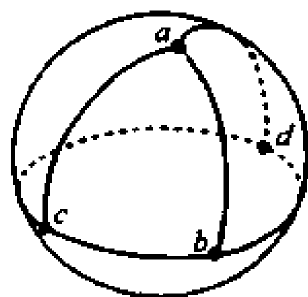


图 12

加 4 个顶点减 6 条边等于 2. 大多数的书把它以方程式的方式记作 $F-E+V=2$. 现在，像我们在图 9 中已见到过的，我们可以把这些曲线的布局整个拉到前面部分来（只要不剖开也不加上新东西即可），从而得到图 13.

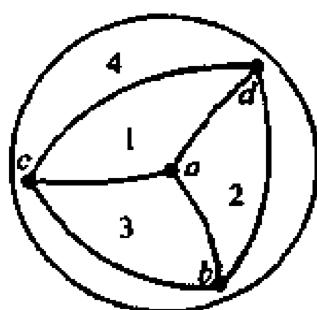
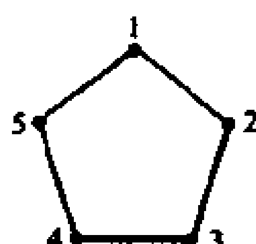


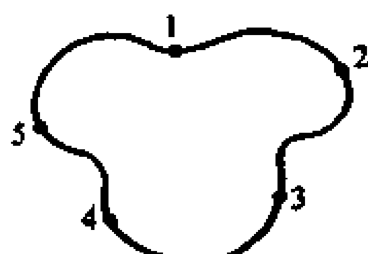
图 13

这时，我们仍有 4 个顶点 a,b,c 和 d，以及连接它们的 6 条
[11] 边. 原来 4 个面中的 3 个是三角形 1, 2 及 3，而第 4 个则是在这新图形外面的部分. 从拓扑上讲，它仍然是一个三角形，因为它仍被同样的三条边围成. 这可以画在一张平铺的纸上，只要我们记住那图形周围的空白部分表示了那个看不见的面. 事实上，所有的多面体都能画在平铺的纸上，只不过在有些情形下难于弄明白罢了.

如前所述，在拓扑学中，你可以在不改变图形连通方式下进行形变，那么在多边形的情形下，你就可以把角变成光滑，但你必须把顶点保留为它上面有标记的点. 图 14 左边的那个五边形



五边形



拓扑五边形

图 14

变成右边的图形，它仍然有 5 个顶点，5 条边：有一些关于多面体的点，边，面相关联方式的规则，但相当复杂；其中之一是，4 个面是最少的，另一个：顶点至少是 3 条边相交的地方等等，而我将要把欧拉的规律应用于我们可以画出的任何图形，条件是要遵守下面这些规则：它必须是完全连通的，即没有不连结的部 【12】
分．每一条线在它的自由端（如果有自由端的话）有一个顶点，在此它与另一条线接触或相交——而这另一条线则可能位于以前生成的一个顶点上．任何围起来的一块都算作一个面，包括外部的空间．它必须是画在单连通曲面上，不允许有炸面圈形状出现，因为那样一来，规则和公式都要改变．现在，我们会非常惊讶地发现，欧拉定理变得容易证明了，至少变得容易弄懂了；如果我们要证明前面所说的事实则也可在多面体的情形下证明它．从一条单独的线（图 15）开始；因为它有两个自由端点且不包围任何部分，故它给出 1 个面（包围它的空间），1 条边（它自己）和 2 个顶点．在后面的方程式中我们使用了一种多少有些非正统的符号，即在一个数字后空一格再接上一个字母来表示它所代表东西的数目；$2V$ 代表两个顶点，从而等同于数 2．方程式是 $1F-1E+2V=2$．如果现在把端点连接起来（图 16），可以看成作出了一个顶点，而这个顶点可以随意地放在曲线任何地方．它包围了一块空间，因而给出 2 个面，1 条边及 1 个顶点（$2F-1E+1V=2$）．



图 15

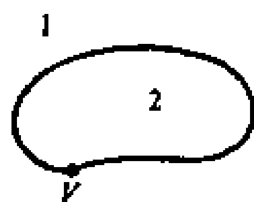


图 16 【13】

现在，我们转而用另一条曲线去穿越第一条，而且它们仍然没有包围任何面积；我们得到 1 个面，4 条边和 5 个顶点（$1F-$

$4E+5V=2$). 如果它们仅仅交而不穿越，我们得到 1 个面，3 条边和 4 个顶点：还是得 $1F-3E+4V=2$. 我们也能在一条边上加上任意多个顶点：每个新顶点将在边上分出一条新的边来，在图 17 中给出 $1F-4E+5V=2$. 当一条新的曲线或边与一个圈(自身相连结的一条边)相交于它的顶点时，我们得 $2F-2E+2V=2$. 如果不是在它的顶点则有 $2F-3E+3V=2$. 同样地，一条边与一个圈交于 2 点时给出 $3F-3E+2V=2$(图 18).

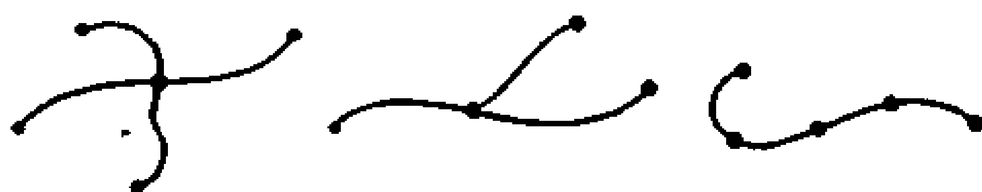


图 17



图 18

显然，要得到一个新的面则至少要加上一条边，而且这条边
[14] 必须把它两个端点都连接上去或者它本身就是一个圈：不然的话，它就不会包围任何空间. 请记住：虽然在拓扑中我们进行着形变，但在下面的证明中当图形画好之后我并没有改变什么. 下面的形变应用于所有的情形(或图形).

1. 如果在一条边的两个顶点之间加上一个顶点，则它分割开这条边：1 条边变 2 条，因而在 $F-E+V$ 中增加了 $1E$，它消去了新增的 V.



图 19

2. 增加一条与一个顶点相交的边:(在 $F-E+V$ 中)它自己的自由端点抵消了新的边.

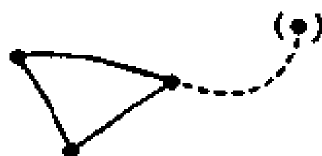


图 20

3. 增加一条边,它的一个端点与一条边相交于两个顶点之间:增加了 $2E$ 和 $2V$(将原来的边一分为二).如前面一样,相互抵消.

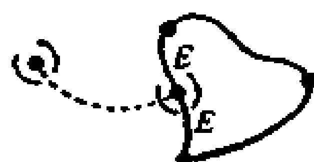


图 21 【15】

4. 增加一条边,它的两个端点各自与一个顶点相交:增加了 $1F$ 和 $1E$,但没有改变 V;它们相互抵消.

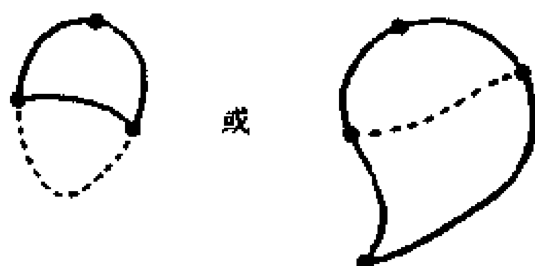


图 22

5. 增加一条边,它的两个端点交于同一个顶点:增加了 $1F$ 和 $1E$,相互抵消.

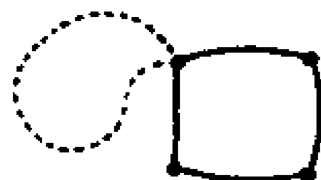


图 23

6. 增加一条边，它交于 1V 与 1E：增加了 1F，2E 和 1V，相互抵消（$1F-2E+1V=0$）.

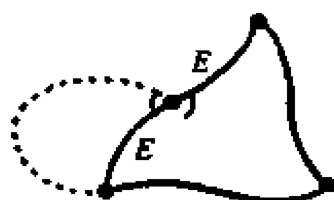
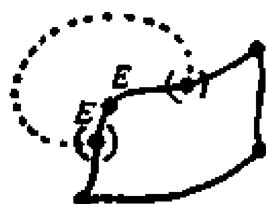


图 24

7. 增加一条边，它交于两条不同的边：增加了 1F，3E 和 2V，相互抵消（$1F-3E+2V=0$）.



[16] 图 25

8. 增加一条边，它的两个端点同时交于一条边内的一个点：增加了 1F，2E 和 1V，相互抵消.

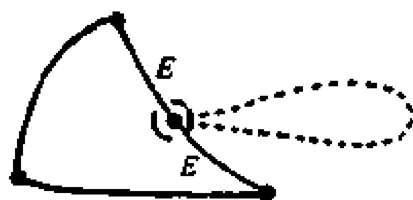


图 26

以上这些穷竭了所有添加边与顶点的方法，从而任意图形都可由它们来构图，条件是这个图形是连通的，并且是画在单连通曲面上的. 因此，这对于多面体也是对的. 请对一个随意画出的复杂图形试一试这个方法. 我们一直在强调这些图形必须是在单连通曲面上这个规则：那么，当这些图形是在一个环体表面上时，欧拉定理会遇到什么情况呢？回想一下图 6，我们立刻可以看出这

个定理不成立:重新画成的图 27 表明 $1F-2E+1V=0$. 我们在前面(图 7 上面第二段)说过,一条画在环体表面的约当曲线,只要它不环绕或者从头至尾穿过这个空洞,它就仍把表面分成两 [17]
块. 依相同的方式,任何一个我们刚才所讨论过的连通图形都可以画在环体上,而且只要它们不是连通地环绕或整个穿越这个空洞,就可以应用欧拉定理. 如果这些曲线代表了有一个空洞的多面体,则它们既是连通地环绕也是整个穿越了空洞,而多面体正是欧拉在叙述这个定理所想到的东西. 有一个空洞的最简单的多面体画在图 28 中——用透视画法,以便指明所有的边. 它有 9 个面,18 条边和 9 个顶点,给出了 $9F-18E+9V=0$.

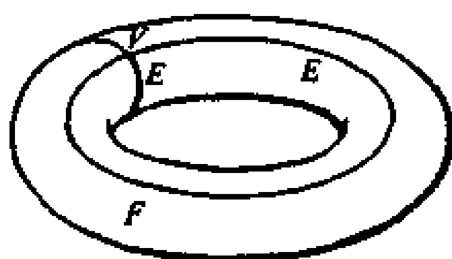
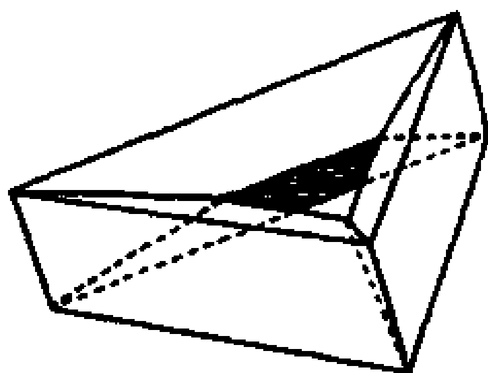


图 27


图 28

虽然没有叙述它的证明,上面的公式却是对于双连通曲面的新的欧拉定律;只要假定至少有一条曲线环绕了空洞,还有一条整个穿越了空洞,则此定律对它们上面的所有图形都成立. 注意:欧拉定律可以推广到所有由线和点构成的图形:先从纸上的一个点出发,$1F-0E+1V=2$,而且我们还能把具有不连通部 [18]
分的图形包含进去,这只须把公式改写为 $F-E+V-n=2$ 即可,这里 n 是不连通部分(点,线,图形)的个数减 1. 读者能够由实验来证明它,而且会揭示出隐含在这个公式里面的道理——当然是在做过了这些之后.(自然,它也只能用于单连通曲面.) [19]

第2章 新的曲面

重要的是，永远不要被大数学家吓倒：如果他说某些东西是平凡的，不过在表明它们不具有足够的一般性，只是一种特殊情形，是极其非 T 的（即非拓扑的）罢了．我们不必泄气，因为他感兴趣的仅仅是高度的抽象性，而我们也有同等的权利去对有形的事物产生兴趣．他会说，他是为了纯粹的数学，为了数学自身的目的而不是应用，做数学是因为它所具有的乐趣；但是我们就像折叠纸模型那样，可以从被他称为的“数学异物”中取得乐趣．所说的有形指的就是直观，它们有相同的意思，它也正是保尔·阿历克山德罗夫（Paul Alexandroff）论述过的主题（他是个非常高级的拓扑学家，我们所引述的话出自他的书《拓扑学的初等概念》）：

【20】 “我想把点集拓扑学规定如下：决定哪一种点集论的结构与初等多面体拓扑给出的素材在直观上有关联，并因此应当把它作为几何图形来考虑——哪怕它是一个非常一般的结构．”（重点是他自己加上的）．

心里装着这个令人振奋的思想，我们现在来考虑纸模型．反对用纸模型的根据是说纸张具有极其非 T 性质：它不能伸展．虽说这不是绝对真的但也差不多如此；另外，纸张薄得足以作为一个柔韧的二维面模型．它的不可伸展的性质在某些情况下也

还是有用的，因为它使我们不得不保持严格的实际距离或测量尺度．纸张还使我们能确认它的每一个侧面，而要对一块黏土做到这点却是困难的．我们已经知道，一个曲面可以是单连通的也可以不是；是否有其他改变连通性的方式？我们说过，球面和一张纸都是单连通的，但它们之间仍有区别：一张纸由它的边缘所界定，就像多边形一样；而球面则不是．因此，虽说画在球面上的任意图形可以与平面上的一个图形同胚，但整个球面并不同胚于这个平面，因为当我们在一个球上把这张纸摊开并绕向另一 【21】
边时，如果不作一个缝合的话总会有一个空洞．现在我们去考虑纸张，看看在没有伸展的条件下我们到底能走多远．

显然我们用纸做不成一只球，却可以做成一个立方体，它同胚于一只扭曲的球面．我们也可以做成一个圆柱：仅需连结端线，即粘合对边 AB 与 $A'B'$（图 1）．

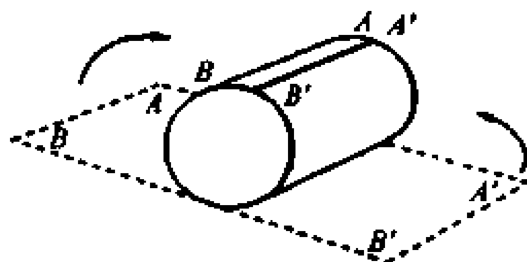


图 1

如果我们的圆柱较长而且柔韧，我们可以把两端并在一起，得到一个空壳的环（图 2），但是利用纸张所具有的那一点点柔韧性，我们还可以做成一个变了形的曲面——环面的一个真正的同胚体．首先，我们承认把一个纸制的圆柱压平之后仍然是圆

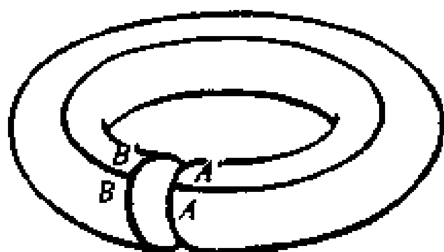


图 2 【22】

柱这个论断是正确的：我们得到的东西的连通性和一个圆柱的连通方式是一致的，即便我们不能展开它使其具有完全圆形的截面，从拓扑观点看，它仍是一个圆柱．依此，我们做个长的纸圆柱，然后压平它，折叠它或把它弯曲过来使得两端正好面对着，而后用胶带把它们连接起来（就像我们在前面对边所做的那样）．它现在像是一个瘪了的压平的内胎(图 3)．

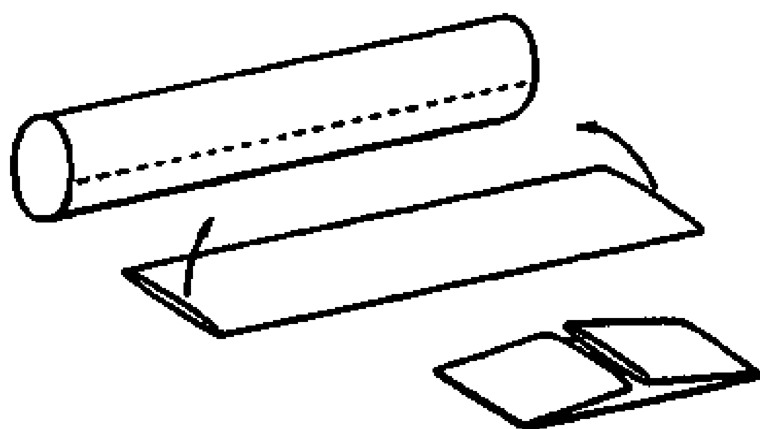


图 3

请注意，这个绕一圈的而现在是平的两端，是这样连接的：使两个侧面（内侧和外侧）的内侧与内侧，外侧与外侧相连．但是
【23】如果我们取一张平的纸条而不是圆柱，这件平常的事实就可能不成立了．在我们连接两端前，如果我们先将纸带作半个扭转，我们就会把两条相反的侧面连接起来，从而连接了相反的边．称图形4为一条麦比乌斯（Möbius）带；如果我们沿着边缘走，就

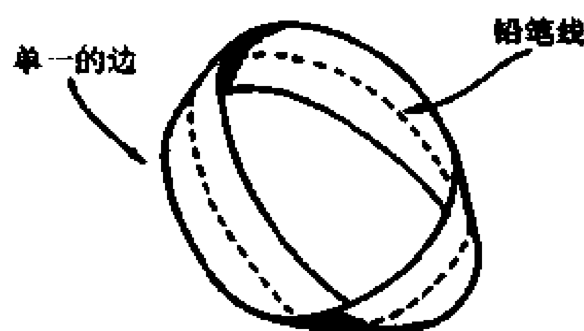


图 4　麦比乌斯带

知道它是自身相连的一条连续曲线，形成了一条回路．如果我们沿长的方向画一条铅笔线，则它将回到它的出发点．

麦比乌斯带只有 1 个面和 1 条边．这是一类新曲面，具有一种新的连通性．做一条麦比乌斯带，然后沿其中心线切开，这时一件令人惊奇但完全合乎逻辑的事发生了：尽管这条切口完全绕它一周并回到它自己，这带子仍然还是一整条．说它合乎逻辑是因为，当我们给出半扭转时，我们将带子的上半条与下半条相连接（在图 5 中 AO 粘合 $B'O$，BO 粘合 $A'O$）．我们的切口并没
有破坏连结处．以后我们还要返回此处并对它作些有趣的实验．【24】
我们可以说它只有一个面，然而这个事实仍使我们陷入了语义上的麻烦：当我们说"不可能在两个面上涂上不同的颜色，因为它只有一个面"时，我们究竟表示什么？ 两个面？ 一个面？ ……这个反常现象绝非平凡，必须搞清楚．

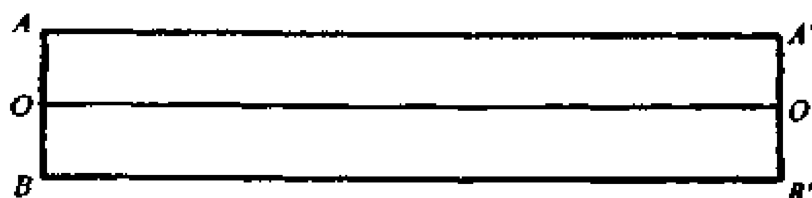


图 5

可 定 向 性

如果我们把两个并排停泊的浮台的甲板推靠在一起并把它们连接起来，我们可以说这两个曲面已结合成了一个曲面，因为这时可以在甲板上从 A 到 B 画一条连续的曲线（图 6）．相似的情形是，在把纸条上面的面经扭转和粘合后与下面的面相连接．

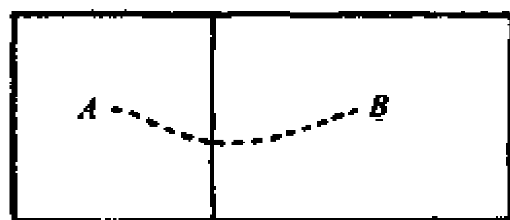
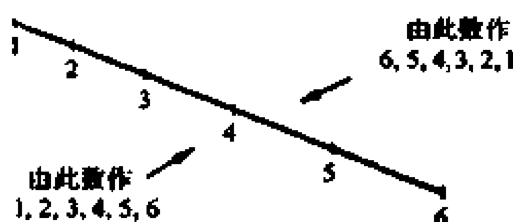


图 6 【25】

但是有另一种不同的说法：我们可以在它上面画一个点，而后把它翻转过来画另外一个点，它正好在原来点的对面.在这个新说法中这些点是在“相反的面”，然而从能够作一条连续曲线来连结它们的意义上说，它们又是在同一个面上.

假设这张纸无限的薄，正像是一个数学平面应该的那样，而且还没有被扭转过.它有一个上面的面，由无限多个点组成.下面的面是个对应的点集，但因其厚度为零，它们与上面的点集重合：它们是上面的点集，但我们还是说到两个“面”.如果这些点从单个看没有大小，怎么会有面呢？它们该如何定向——从右到左，还是从前到后？从单个看，做不到这点，但作为群体却可以：因为它们处于特定的顺序，当从另一面或另一方向来数数或观察时，这个顺序颠倒过来了.这里是个直线可定向性的例子，即1维空间的定向(图7).



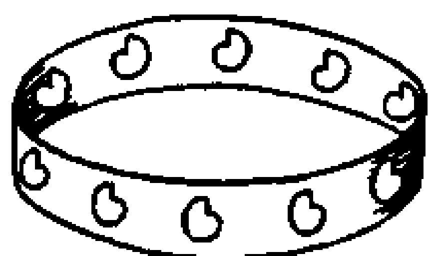
[26] 图 7

现在让我们取一纸条，在上切开一个具螺旋形轮廓线的洞.(如果我们用的是描图纸，就可以画上一条很黑的轮廓线而不用切个洞.)假定我们没有把纸条翻转过来，那么不管我们怎样转动，这条螺旋线总是顺时针的旋转线.但若将它上下颠倒，即把纸条翻转过来，那么螺旋方向便反过来了，或说是逆时针旋转，像图8所示.



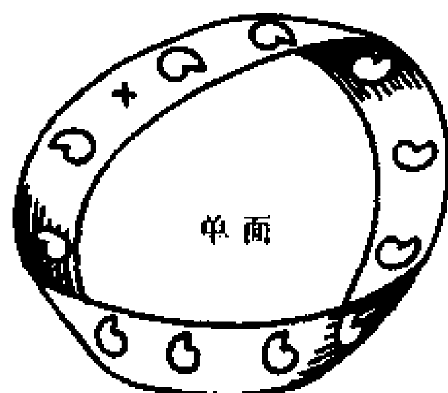
图 8

我们可以在纸做的球面的各处做上许多个这样的洞，从球外看它们全部是同一方向的；相反地，从内部看，它们全都是反向的．对于纸圆柱这点更容易明了，然而对这两种曲面我们都可以用相似的洞把它们覆盖——全都是顺时针的螺旋（图 9）．如果我们也想对麦比乌斯带这样做（图 10），当我们在曲面上连续移动时，一段时间中一切都像前面那样顺利，然后我们发现我们的下
一个已割开的洞却是逆时针螺旋的，这是因为它是在相反的面或 【27】
方向上割开的．这意味着麦比乌斯带是那种被称作不可定向的曲面，这个词比说它是单面的要少些错误理解．由此，我们能够说，任一双面曲面是可定向的；任一单面曲面是不可定向的．



双面的圆柱

图 9



麦比乌斯带

图 10

维　　数

当我们说一个立体具有维数 3 而一个平面只是 2 维的时候，我们所指的事实是：从数学的观点说一个平面具有长和宽却没有厚度．但面可以是不平坦的，例如球面．有两种办法来描述这个非平坦性：其一是引入高度作为第三个维数，以测量曲面上
所有点的位置，即它的每一个部分的位置．图 11 中曲面的中间 【28】
部分隆起，我们可以用给出坐标，即从点 O 沿三个方向的距离 x,y 和 z 来标定出各个点的位置．对这种 3 维的描述方法，还有另一种说法：这个曲面是球面的，锥面的一部分等等．

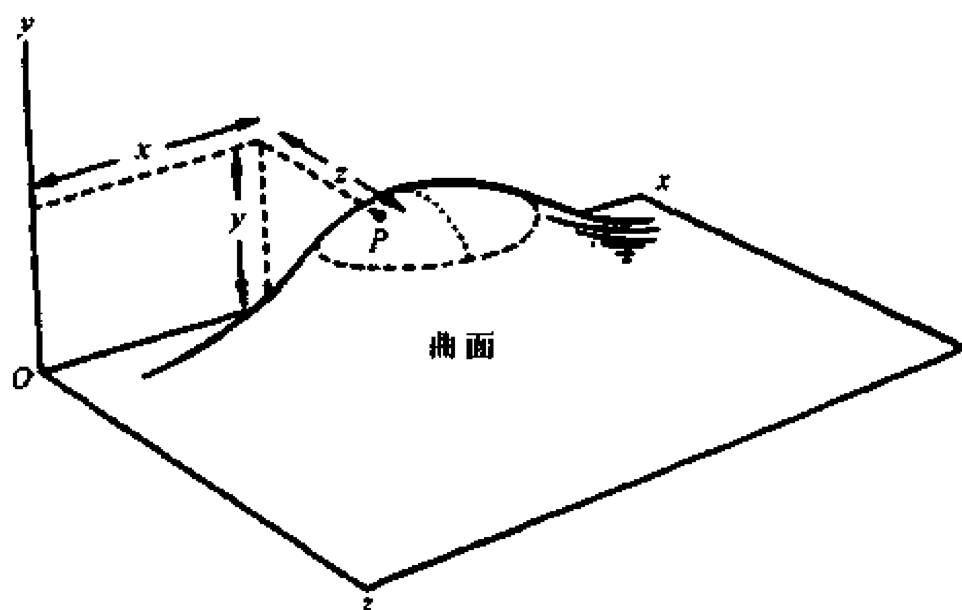


图 11

另一个更加拓扑的方法是把第三个维数撇在一边，即表明不再参照这个维数了．这个方法是作出曲面的图．如果在平面上作一个圆及其直径，并丈量它们的长度，求出它们的长度比 3.14159…(π)．如果在图 11 中重复上述过程，则发现它的直径过于长了(见图中虚线)．要制作一张给出了所有距离和方向的
【29】美国地图，依靠的是对每个点位置的一系列描述，这个位置是参照于邻近的地点给出的；它不可能以精确的尺度被画成平面图：它的中央隆起，是球面的很大的一块．没有必要在每英尺甚至每英里都标上一个点，每个县标上一个点就能表现出所画出的地方是不平坦的．你不可能在依阿华州作个标记而使得它与

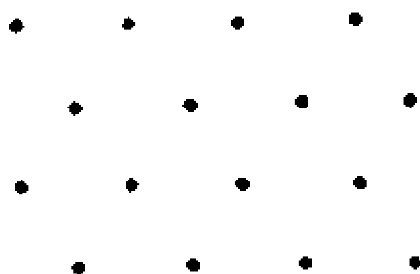


图 12

周围相邻地方的距离都是 100 英里来安排新标记:图 12 是个六边形的布局,它可以在平坦的面上无限制地扩张,但是在美国,当你从第一个标记点往前时它们开始挤成一堆:它们不再适合了.在一只生土豆上用铅笔和卷尺试一试吧.

在拓扑学中我们追求的是把距离完全撇在一边的描述,因此任何曲面只要是单连通的就可以变换为平坦的面;这时,我们 【30】
要对距离的长短不在意才行.在地图的绘制中就是这样做的(通常用的是墨卡托(Mercator)投影法),但是这个方法至少还力图使相对距离保持得尽可能接近正确.如果我们没有由直接观察推演出世界是个圆球的结论,我们仍可以由度量点和距离来推断出它;如果我们甚至不能度量距离,至少我们可以说出世界是单连通的,这只要在整个世界上作出一个网格,然后数出它所围成的块(面)数,线段(边)数和它们的端点(顶点)数;如果这世界是一个巨大的环体,我们就立刻找出一个空洞来,因为计算会告诉我们 $F-E+V=0$.

那么,在拓扑学中我们所关心的是一个曲面是怎样连通的,并最终完全舍弃掉距离的观念,但是如果我们逐步地去做的话,我们可以更清楚地把握住它所涉及到的东西.

另外两个曲面

到现在我们有了下列一些由纸做成的曲面:平面、柱面、环面及麦比乌斯带.附带说一下,柱面可以拓扑地变形为具有一个洞的平面.图 13 中最后一个形状称为圆环,它同胚于任一个带 【31】
一个孔的平面,它总共有二条边.当我们谈到一条纸带具有两对边时,为方便起见总是把它当作多边形来对待的,但是如果我们要忘掉它的 4 个顶点或顶角时,我们可以按不同的情况把它变形为任意一条闭曲线.那么让我们依照它们是怎样连接或怎样不连接,有多少个侧面和边来列出前面所提到的四种曲面.它们是:



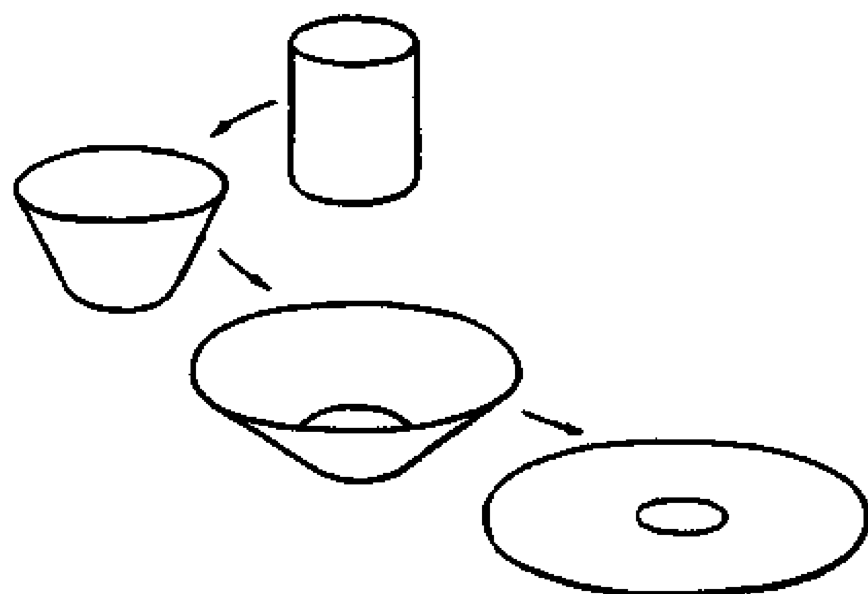


图 13

平面(矩形):

无连接,2 面,4 边.



[32] 图 14

圆柱面:

1 对相连接的边,2 面,2 边.

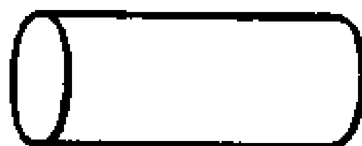


图 15

环面:

两对边都相接,2 面,0 边.

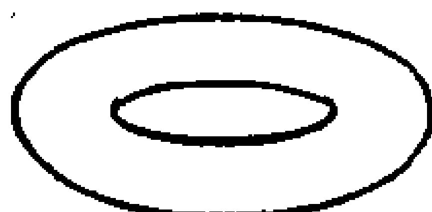


图 16

麦比乌斯带:

1 对边扭转相接,1 面,1 边.



图 17

纯粹从上述运作的组合判断,还有两种可能性:两对边都各自相连接,但其中一对是扭转相连的;还有一种与上面的一样,但这两对都是扭转相连的.乍看起来,这些情形似乎不可能出现,但这些永远 [33]
也吓不倒一个真正的拓扑学家.拓扑学的精华正在于思考这类运作的所有可能的组合,事实上也几乎是全部的曲面.要紧的是逻辑上可以想到的组合而不是我们是否能在实际上进行操作.碰巧,对第一种情形可以做出一个不完全也不甚完美的模型,而第二种的模型则是更加不完美.第一种依德国数学家费里克斯·克莱因(Felix Klein,1849—1925)的名字冠名为*克莱因瓶*,第二个被称作*射影平面*,这样命名的理由则过于繁杂,本书不便深究.我们先谈谈第一个吧.

克莱因瓶

对此我们要做的是把边 AB 与 $A'B'$ 粘合起来——现在我们把顶角按谁与谁相连的方式标以相应的字母.这就像做麦比乌斯带一样,但我们现在要做的是将余下的两条边 AB' 与 $A'B$ 粘合起来(图 18).

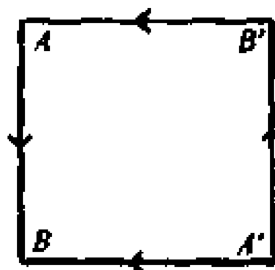


图 18

【34】（这里不考虑按比例粘合的问题；而各种箭头表示第一个粘合有扭转的过程而第二个则没有.）如果读者做一个它的纸模型就会发现这几乎完全做不到，不管我们用多少纸来做这个粘合都不成；它应该是什么样子呢？任何一个能满足要求的曲面必须应具有下面的形状，即多少有点像一个人，他脱下外套，把它的一只袖子从里到外翻过来，然后再穿上还要把所有扣子都扣上.

达此目的的最好办法是从相反的顺序进行粘合：我们先粘合上顶和下底的两边，得到一个圆柱（设想为一个长的）. 箭头现在是环绕在两个圆形端线上的方向. 当我们把圆柱弯曲并将两端粘合起来得到环面时，这些箭头按同一方向旋转，或者说具有相同指向. 我们也没有忽略要在粘合处作扭转：尽管四个顶角均重合于一点掩盖了扭转这个过程，图 19 的箭头仍旧表明了这点.



【35】图 19

在柱面中作一个半扭转现在可不像原先的半扭转所起到的作用：因为指向，譬如说顺时针，在扭转时仍会保持为顺时针，尽管它也能把 A 从 A' 移开. 因此，箭头的方向，即指向，是更加基本的东西，就像是螺旋形洞的定向一样（见 18 页）. 但我们必须使这两端的圆相重合，并使它们的箭头按相反指向运行，而且因为现在的扭转不可能做到这点，故而我们必须另想办法：那就是，把它们后面放到前面去，也就是说一端将按图 20 及 21 那样被带到另一端来.（实际上是从里面，并按另外的方向.）

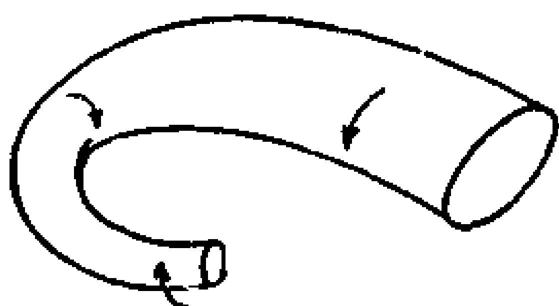


图 20

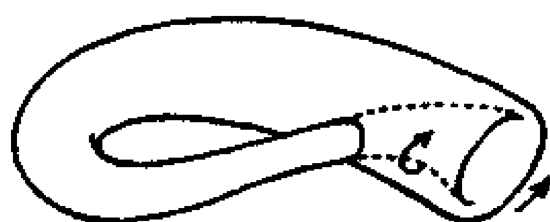


图 21

[36]

像看到的那样,一端被弄得比较狭窄并穿过侧面.图 21 是克莱因瓶通常展示的样子,图 22 是另一种,更加对称的形式.它表现出这两个圆形端线的接合处有点尖角,我们必须记住,在理想的情形我们不应该采用这样一种连接.还是说纸模型的情形.当两个平面交成图中的那种样子时,可以把它想成是拉直了的(图 23),即便由于在正式的连接中不能这样做.第二种形式的好处在于容易用纸来构造,以后我们还要回来谈它.有一点要记住:当我们如图23那样连接两个平面时,两个相对的侧面相互

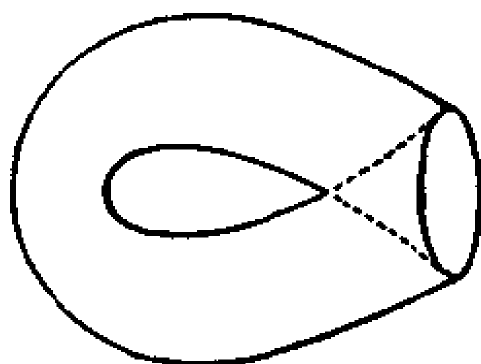


图 22



图 23

[37]

连接也就是两个相背的侧面相互连接.

至于另一个新曲面即射影平面，我们暂且把它搁置一边，因为我们能够做出的准模型的一个致命缺陷只能借助于进一步的学习才能理解.现在，我们能说的是，这个构造不仅涉及到把麦比乌斯带所余下的部分连接起来，并且还要扭转，即两对对边既要连接又要扭转.在我们怀着完全随意的目的做了更多的麦比乌斯带的模型时，我们或许将会以一种较好的心态去了解模型的某些局限性，并能超越它们去观察和了解事物.

在克莱因瓶的图(图 21，22)中曲面穿越自己的地方，我们不得不想象它的两端以某种方式不经相交就重合在一起了——在现实生活中显然不可能.这种相交被视为另一种类型：不需要或不挖开一个洞事情就发生了.那就是说，在相交过程中，两个平面都没有中断另一个的连续性.在模型中这是不可能的，但在数学中只要我们使用了正确的参照构架，它就是合乎逻辑的.如
【38】果我们以点的观点来考虑曲面，我们会发现没有点能像在相交处那样同时处在两个地方：同时在去交的平面部分和被交的平面部分.

稍后，当我们着手群体或集合的问题时，这个明显的怪异现
【39】象将变得比较清楚.

第3章　最短麦比乌斯带

难题有时会引出实验而实验转而能得到相当出乎意料的结果.现在我们将走进实际制作一条尽可能短的纸质麦比乌斯带的问题中.这里"短"表示与带的宽度相比于它的最终边长的一半是短的,这宽度是说我们粘合(经过一个半扭转之后)的边的长度.我们把开始制作时的平坦纸条的长度称作麦比乌斯带的长(图1).

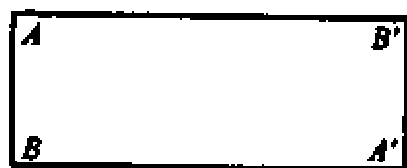


图 1

最终的那一条边是此长的两倍,因为它由上面的边 AB' 与下面的边 $A'B$ 首尾相接构成的.宽则是 AB 的长.在进一步读下 [40]
去之前,用一条真实的纸条看一看,它究竟可以多短还能够扭转并叠合起来;这里说的扭转即把一端翻转过来的半扭转.

即便没有给出一个冗长的证明我们也能说,把纸的折缝压平之后是条直线.同样正确的事情是,如果纸张真的没有伸展性(非弹性),我们就不可能扭转它并在其中间保持了一条完全笔直的线,这是因为在图2的情形下,边 AB' 及 $A'B$ 都比中心线 CC' 长.

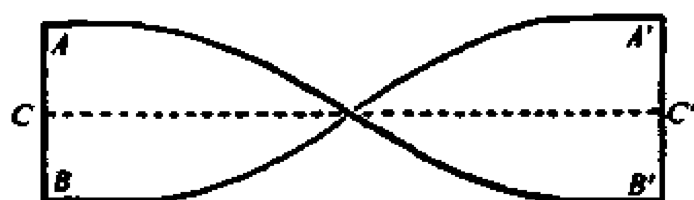


图 2

但是我们并不坚持纸带非要像这种样子不可.我们可以把纸条放平,折成图 3 的那样的一个三角形;可以看出纸条已经作了一个所要求的半扭转了.我们可以把这三角形收缩到中间的



[41] 图 3

空隙完全没有了的地步(图 4).似乎这就是极限了,但让我们作一个具本质性的实验,它开始使用的纸条就比这个比例更短;这个比例容易用几何方法算出来,它由 9 个等边三角形像图 5 那样相连.我们取一条 2×6 英寸的纸条并将它扭转,而后将两端拉到一起,用胶带把它们粘起来.它看起来多少会像图 6 那样,曾经是一个开口的三角形的中央部分现在是相互搭接在了一起.

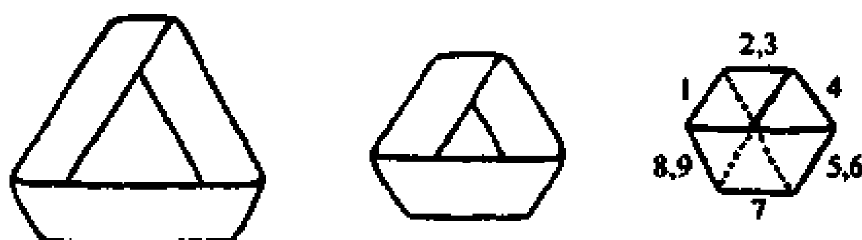


图 4

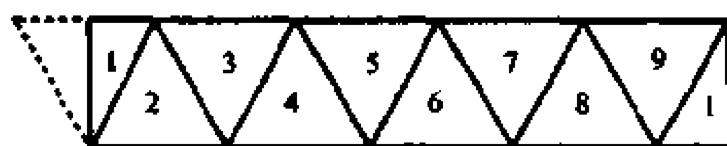


图 5

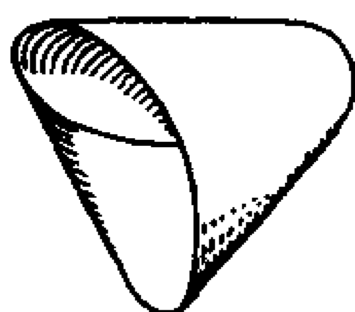


图 6 [42]

可以看出，还能进一步推进，把它缩短成完全平坦的形状．出现这种情况时，我们的纸带由三个全等三角形组成，连接成一条麦比乌斯带．可能会有反对意见，说它不是一个矩形；但是我们可以按直线把一端切开，并把切下的一片移到另一端去以得到一个矩形．新形成的纸条如图 7 那样叠合，这似乎像是短得不

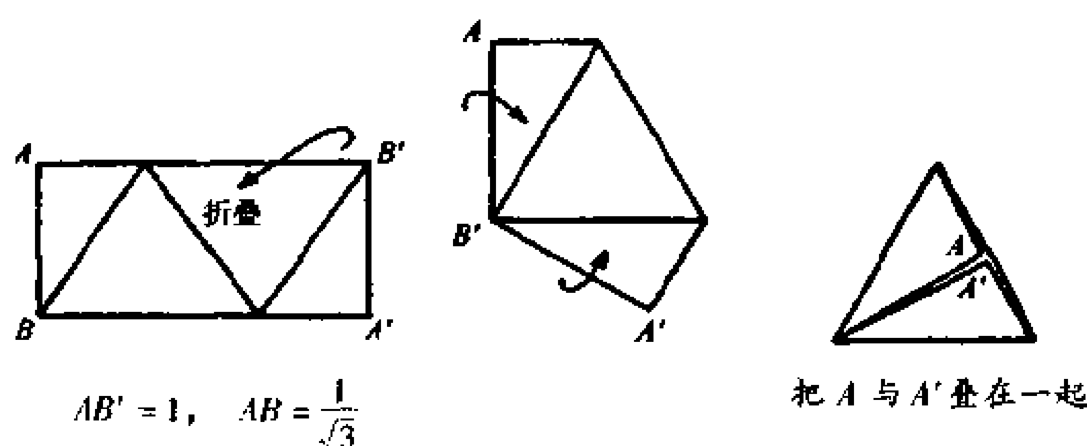
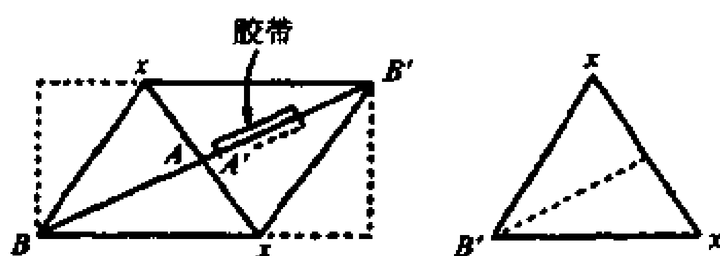


图 7

能再短了；因此，我们将继续进一步作彻底探索，瞧一瞧对一个正方形纸条我们能做些什么．首先我们注意一下，对上面的折叠我们可以以不同的顺序来进行(图 8)：第一步先折叠两个小的三角形，叠合，然后折叠 xx．除去它没有被粘合起来外，它与前面的一个是完全相同的．如果要粘合起来则须在里面进行，为此，只要在作最后一次折叠前先在正确的地方放上一条胶带就容易做到．对一个正方形是否也能进行这种操作？

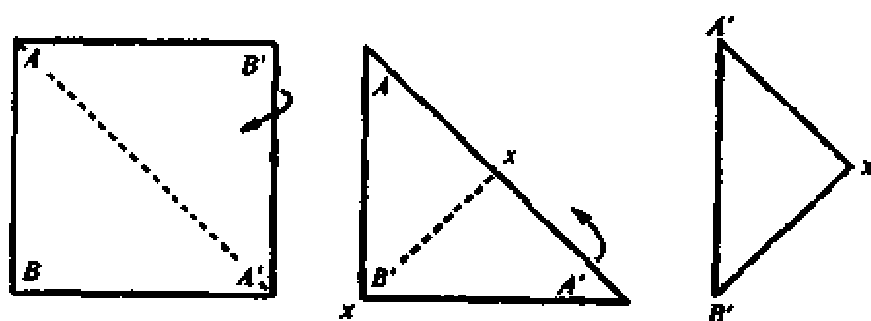




【43】

图 8

首先按对角线折叠(图 9),将 B' 带到 B,然后按 xx 折叠,将 A' 重合到 A 上.现在边 AB 与 $A'B'$ 被适当地排列一起,正好有一个空隙能够让胶带跨越过插入的边 AB' 把它们粘合起来,这里说的不是真正的插入,因为它并没有越过 AB 及 $A'B'$ 而突显出来.就是说,即便我们不能将它打开来瞧一瞧,我们在那里有了一个我们所熟知的麦比乌斯带了.尽管如此,我们可以切开中心



【44】

图 9

线,就像我们在第 18 页中对纸带所做的那样,看一看会发生什么事.为此,聪明的办法是在折叠和粘合之前不要完全切断而是几乎切到两端(图 10).在折叠和粘合后再完成整个切割.逻辑推理告诉我们,我们得到的是一整块,只要非常小心不要撕破

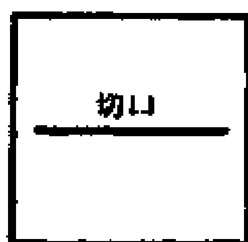


图 10

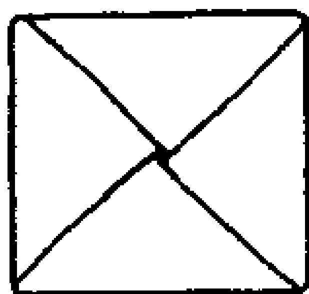


图 11

它，它正好可以展开．最好用一大张纸，如果撕破了可用胶条补好．它张开成一片叠成方形的东西（图 11）；它具有两个侧面，在四个角都有折叠，其折叠方式就像切开在第 16 页中原有的麦比乌斯带，经压平后的那个单个的双面的形状（这个布局由图12表出）．【45】

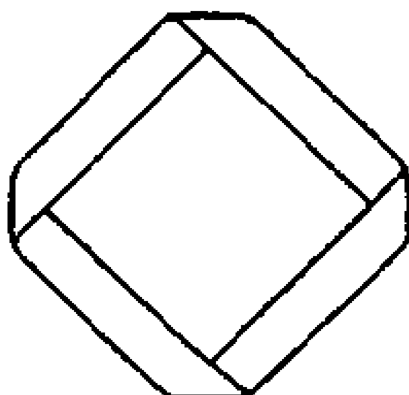


图 12

如果我们用第 30 页的三角形纸带来做的话会要容易得多．我们毕竟不能把一张折叠了的而且扭转过的正方形真正按第 30 页描述的方法去做．图 13 指出这是怎样进行的．首先把顶角 B' 及

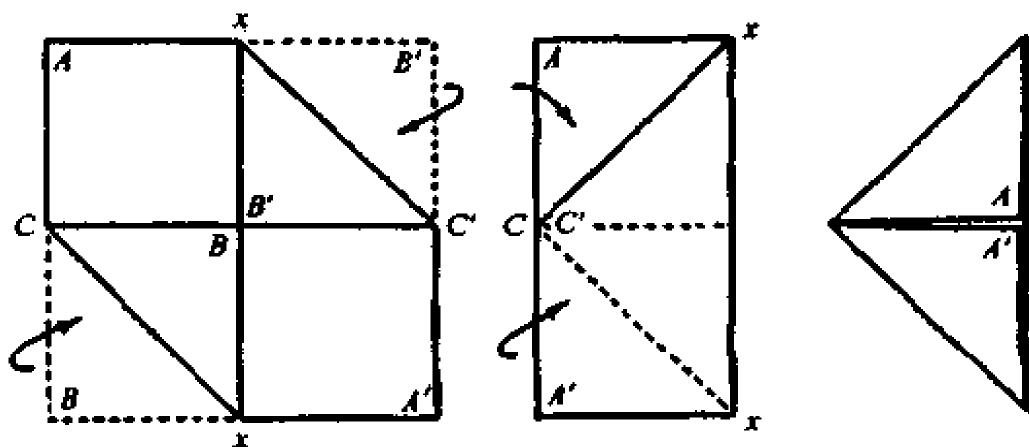
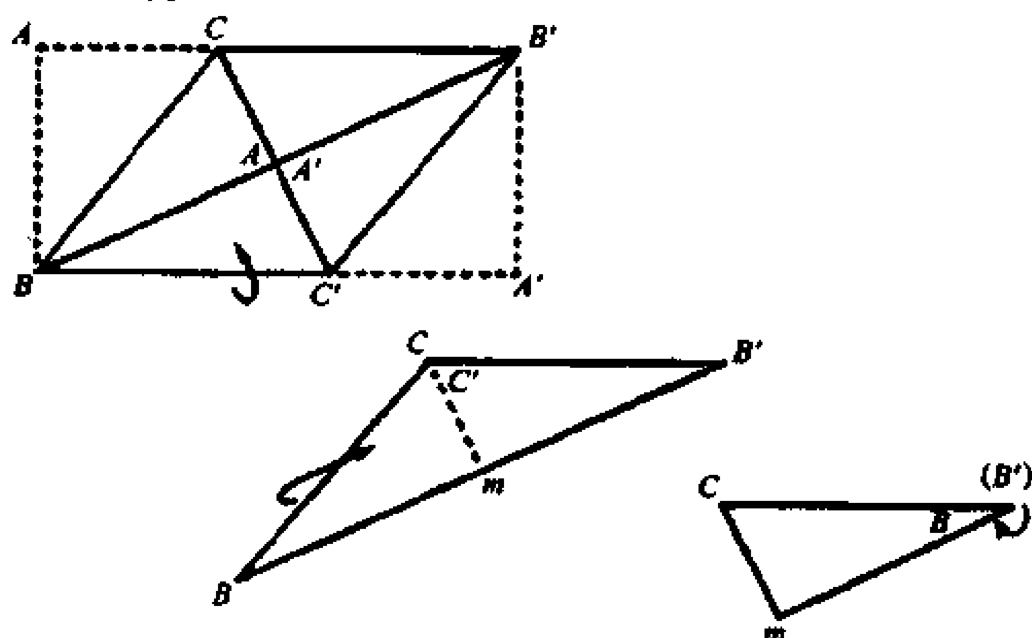


图 13 【46】

B 带到中心，而后整张纸沿 xx 对叠，将线段 CB 与 $C'B'$ 并列以作连接．尚须连接的剩余线段 AC 与 $A'C'$ 现在被叠到了一起并连接起来．与图 9 相比，除了连接处不再是沿斜边而是沿中心线的双重连接，其中一半在外连接而一半在里连接这点不同之外，其他都是相同的．

这没有什么改进之处，但它提出了一种新的解决办法．回到第 30 页的那个早先讨论的情形，当我们把顶角叠到中心后，让我们再按另一条对角线 BB' 进行折叠(图 14)．其结果是使线段 AC 与 $A'C'$ 向内并排排列，使它们能在这里叠合，而我们要完成的事只须沿中线 Cm 折叠，将 B 与 B' 重合，并连接 BC 与 $B'C'$．我们在这里所做过的是构造了一个麦比乌斯带，其长度即我们所粘合的两边间的距离小于它的宽度．可以看出实际的比例是 $w=1, l=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 或说是 1 比 0.577⋯．



[47] 图 14

还能不能进一步改进？答案是肯定的；读者把上面刚用过的方法作一些精心的扩充以用到实验中去，或许会发现些什么．然而，有一种对宽度不加限制的麦比乌斯带的做法，它是由《科

学美国人》杂志的马丁·加德纳发现的，我们把它放在了附录中．我必须说明，是不加限制的宽而不是无限宽，因为后者允许无数次的折叠，这就等于是弯曲，虽说看起来不甚光明正大．利用弯曲我们可以对任何形状的纸张做几乎所有的事，因为它就像橡皮一样了．

当然，没有一个比正方形更短的麦比乌斯带可以在切开中心线时能展开——对正方形而言这是个相当坏的性质．我们知道，得到的双面带必须有 4 个半扭转，当展开放平之后，空档被填满了，边汇拢在中心(图 11)．对更宽的带，它们就不会再有空余的空间了． [48]

运用一条麦比乌斯带的连通性示意图，试一试解答下面问题：在这条带子上画一条连续直线，使得当沿此线切开时，带子分成等面积的两片．在图 16 中，沿虚线切开后的结果正是所描述的那样，可能令人惊奇，但是我们还要加上条件：必须从边缘上开始进行切割．

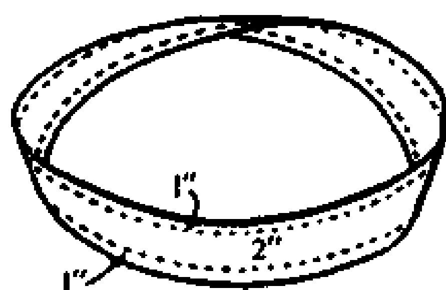


图 15

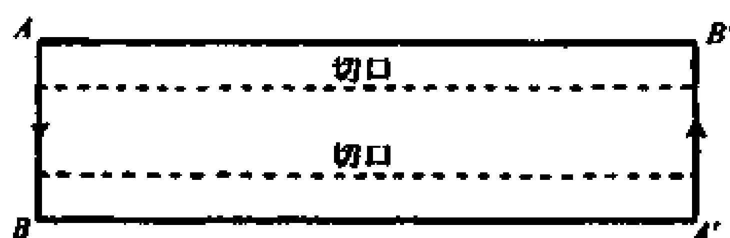
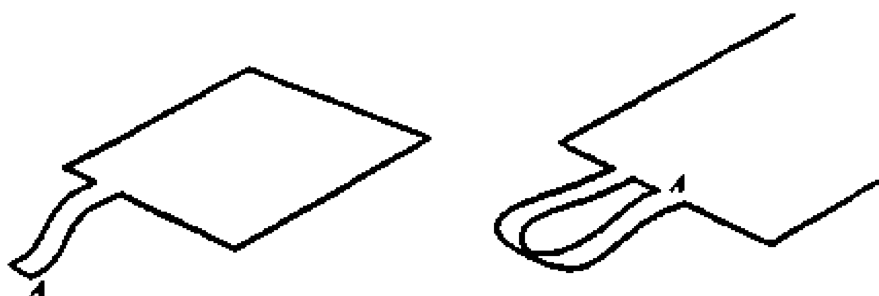


图 16　图15的连通示意图

答案在附录中． [49]

第4章　圆锥麦比乌斯带

在上一章中，我们把只考虑长方形纸带当作理所当然的事．如果我们说只要对任何一张纸连接它的两个相反的表面就做成了一条麦比乌斯带，那么我们就可以取一张在一条边缘上有个小小凸出状的纸，如图1，把A翻个面与主体部分粘起来，而称



[50]　图 1

这全部东西为一条麦比乌斯带．但是在某种意义下，当我们达到更为复杂的形式，像是克莱因瓶或者射影平面时，那么我们就会处在危险的基础之上了．譬如，依上面的说明，我们制作一个克莱因瓶所要做的一切就是把一对对边经半扭转而连接，而另外一对对边则不经扭转而连接．图2似乎就像是这样连接的；图3则像是一个射影平面．

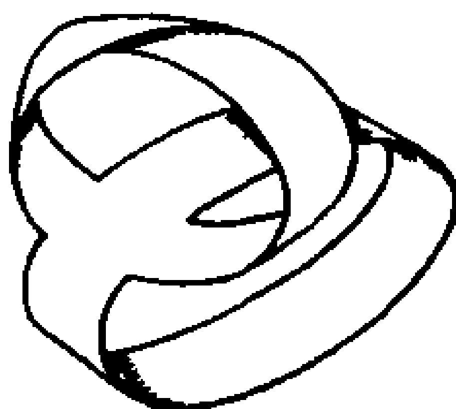


图 2　克莱因瓶

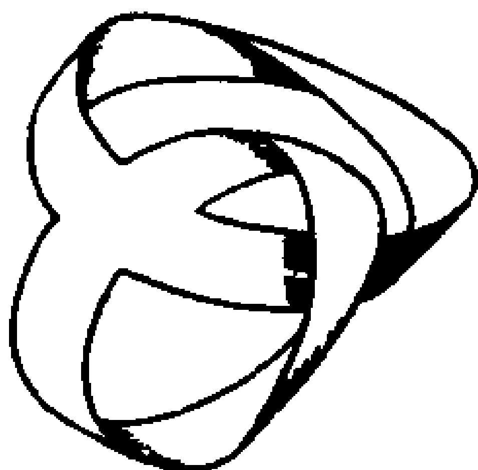


图 3　射影平面;这两个都是由大张的十字形纸张做成

麻烦在这里出自我们真的以为在两种情形中我们连接了所有成对的边.必然会出现自交现象,但在图 2 及 3 中我们却没有 【51】
出现这种现象.(克莱因瓶和射影平面将在下一章中作进一步的考虑).

现在我们要表达的是,对麦比乌斯带也必须加上一些有意义的限制,以确定这些边有多少相连接才使这种处理是合理的.为了取得更进一步的深入观察,让我们看一看所涉及边的总量是否可以增加.我们将从一个圆环着手,它有一个径向的裂缝(图 4).显然端线 AO 与 $A'O$ 可以被扭转及连接,从而由圆环做成一个麦比乌斯曲面.关键是,相对于外直径而言,圆环的空洞



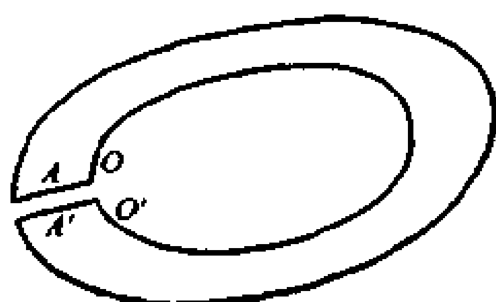


图 4

必须有多大？实验似乎提示它不能太小，然而事实上，我们在作正确的连接时不需要任何一个洞.如果我们取一只圆盘，它有一条径向切口，将 A 叠上来重合于 O 而 A' 叠下去重合于 O，我们
[52] 则可以连接 A 与 B'，也在下面连接 A' 与 B(在 A 下方，图 5).如果这些折痕是圆形的，我们便看到了一个管状的洞口，它斜向一边，这等价于正规麦比乌斯带中的一个(图 6).

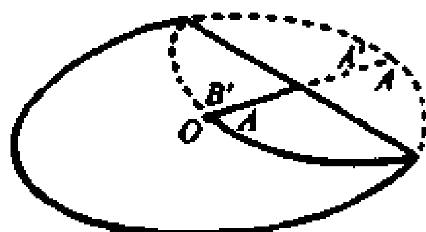


图 5

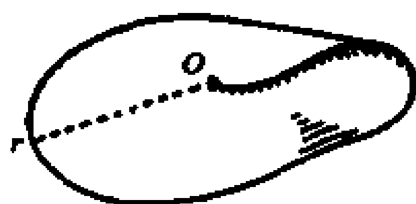


图 6　这两个图表现了一条边收缩成一点

如果把这个形状切开一条新半径 rO，打开它成为图 7.这正是我们开始出发时的形状，然后粘合边 rO 与 rO，得到了一个没有折痕的同一结果.但是我们确实需要用整个的一只圆盘吗(或连结起来的它的两半)？

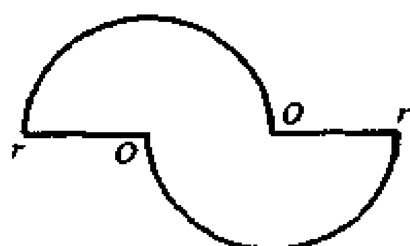


图 7 [53]

是否切掉一块角形扇面来替代原来的径向切口，仍然可能是这种粘合？（见图 8）



图 8

转换成图 7 的说法，我们就得到图 9.

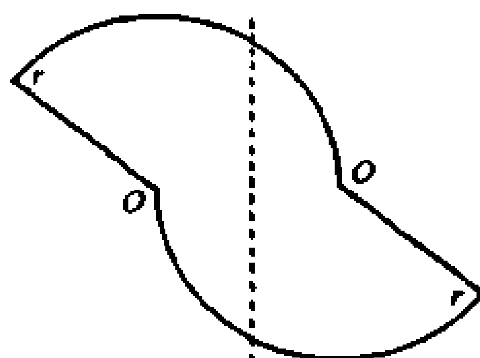


图 9

沿垂直线叠合使 O 重合 O，再沿 Oc 折叠会使 rO 与 rO 并列（图 10）.

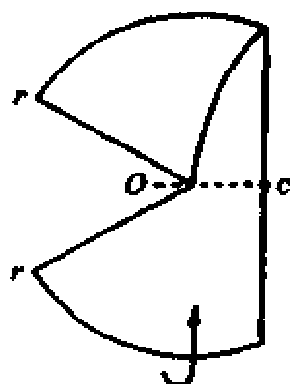


图 10 [54]



实验将表明，这些边可以张开得更大些，而叠合仍然可行，但这并没有使我们离增加叠合边总量的目的更近一些．事实上未叠合的边比叠合过的边更长．那么，让我们回到按径向切开的圆盘的第一种方法吧，只有这次我们可以把切口张开为直径（图11），并要作折叠使 AB 与 $A'B'$ 重合：A 与 A'，B 与 B' 重合．

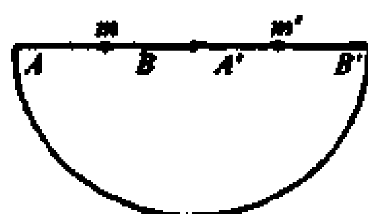


图 11

为此我们把 A 叠到中心（图 12），然后把重叠部分再叠过去，图 13（把 m 折过去）．

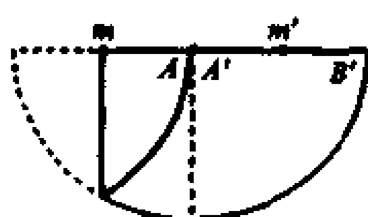
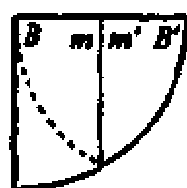


图 12



[55] 图 13

最后 B' 被带到 B 上（图 14）．

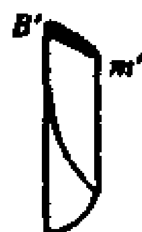


图 14 透视图

实际上 B 和 A' 是相互紧靠一起的点，但我们是以不同顶角或者边的不同顶点的标号来表示它们的，以明确哪条边是哪条. 从上面看（图 15），这些边以正确的方式排列以作粘合.

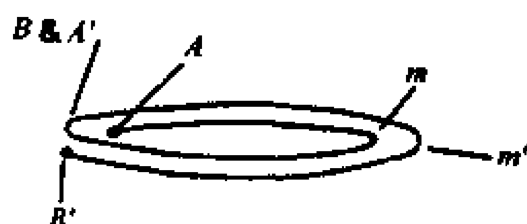


图 15　顶视图

这个带的半圆形表示不再有什么意思了，原来的圆环也用过了，而相粘合的部分仍旧没有比未粘合部分更长. 让我们看一看，是否我们能把这个空子（原来只是条裂缝）打开到比一个直角还要大. 弧 AB' 可作成一条直线，从而给出一个三角形（图 16）. 可以将 AB 粘合到 $A'B'$ 吗？如果可以，我们可使 α 多小？对这里的一个，$\alpha=90°$，我们可按上面相同的步骤得到图 17，它 [56]
的边的视图就像图15一样. 对于等边三角形（$\alpha=60°$）的情形，

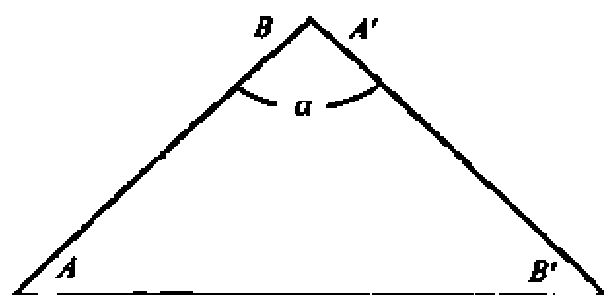


图 16

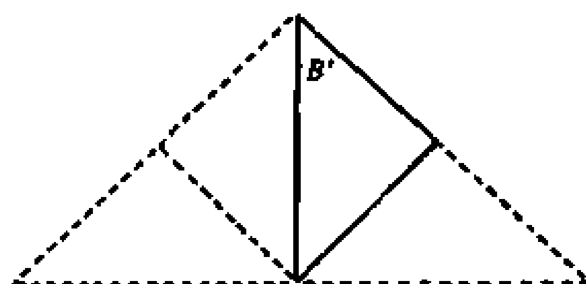
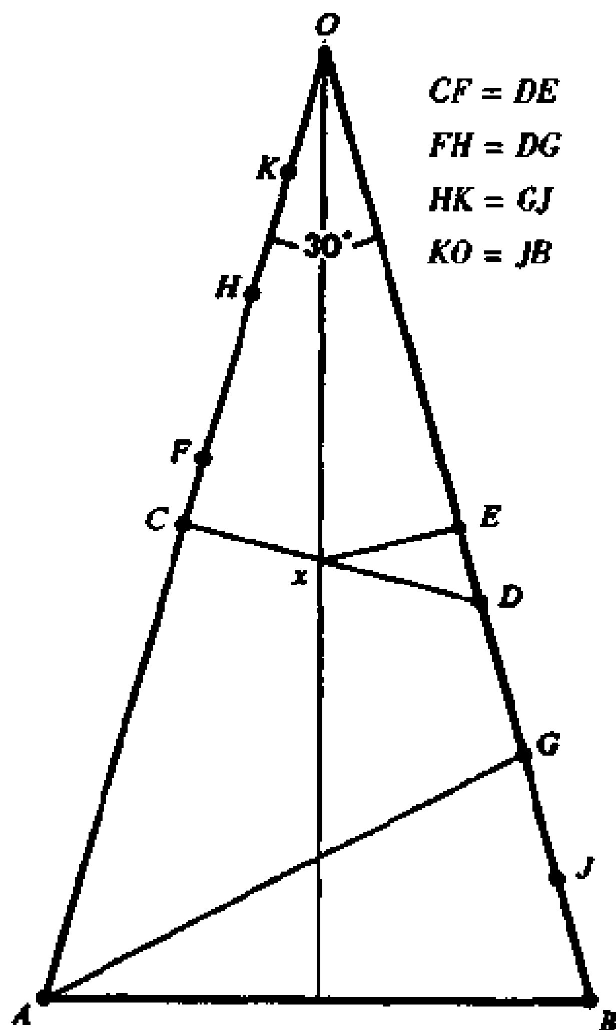
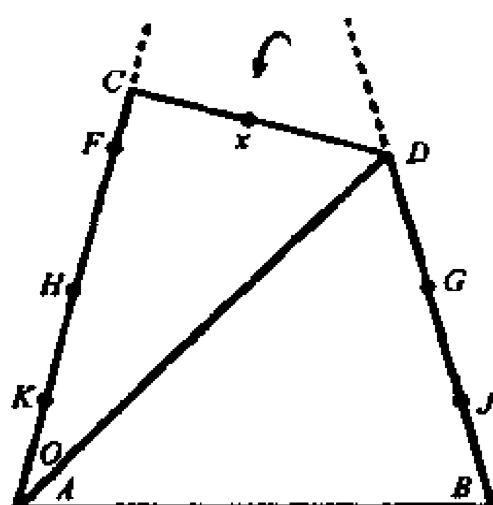


图 17

可以同样地进行；但是当 α 小于它时，未被粘合边 AB' 是有一个重叠的部分了．更令人可气的是，这并不是极限：α 可以减少到 $30°$，而做麦比乌斯的连接仍可进行，其过程几乎就像最后的那个矩形一样的错综复杂，实际上从组成看还要更复杂一些；我们将对它作个综述．用一张至少有 12 英寸高的透明描图纸，在两
[57] 面都标出所有的点，并把要进行粘合的边涂上颜色，两个面都要涂．用铅笔画出图 18 并把它剪下来（包括所有标出的点）：最高的顶点简记为 O，上一个模型中的 B 及 A' 仍在其中．C 是 AO 的中点，E 是 BO 的中点．



[58] 图 18



现在把它从左到右翻过来

图 19

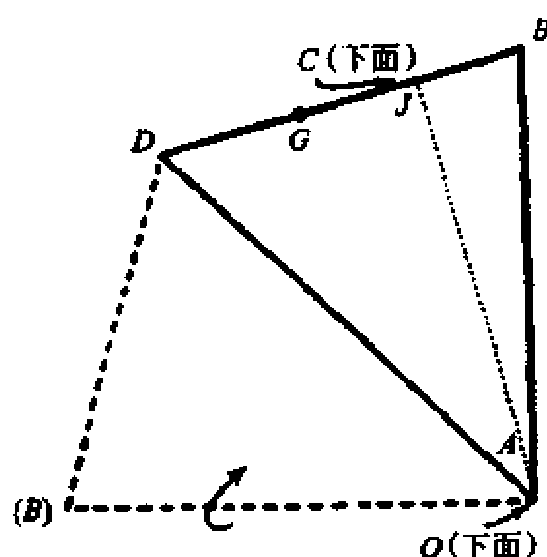


图 20

像图 19 那样把 O 向下折叠，并把此模型翻转过来，将 BDA 沿 DA 折叠过去(图 20). 现在 DO 在 DA 之后并填满了整个 DA. 沿 JA 折叠 BJA(图 21)，然后沿 GA 再折叠 BJA(图 22). 现在 CA 紧贴在 CO 下面并填满了它，同时也填满了 EO，我们把 CA 粘合 EO. 再将模型翻转过来.

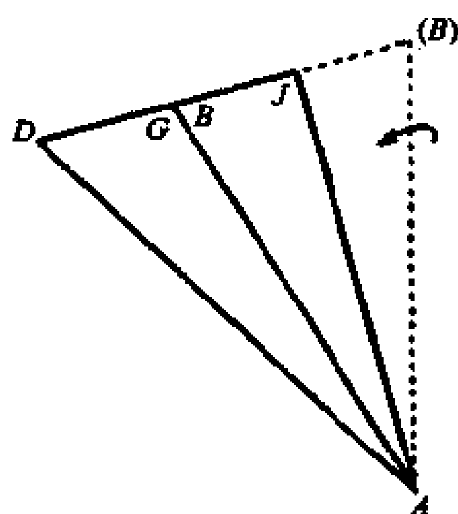
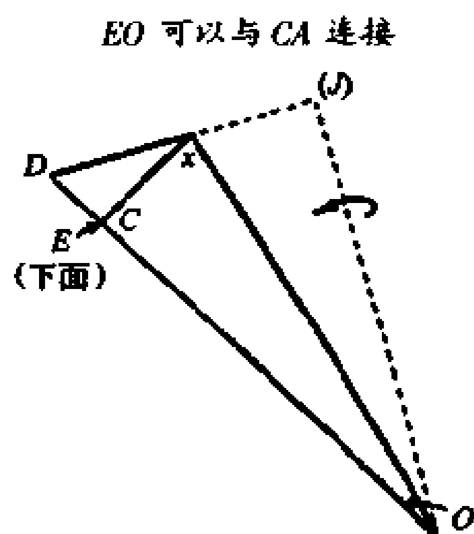


图 21



从左到右翻转

图 22

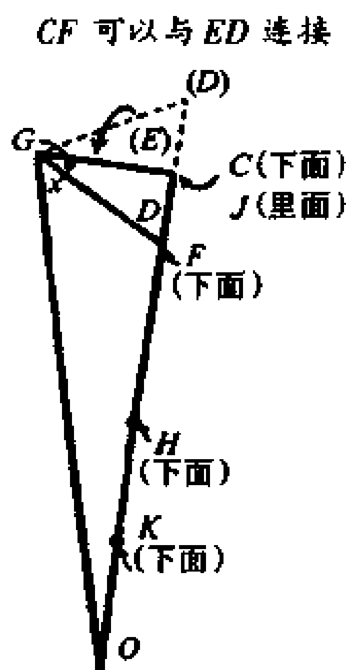


图 23

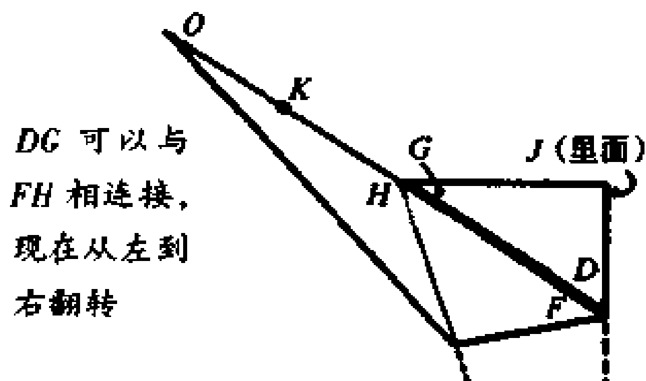


图 24

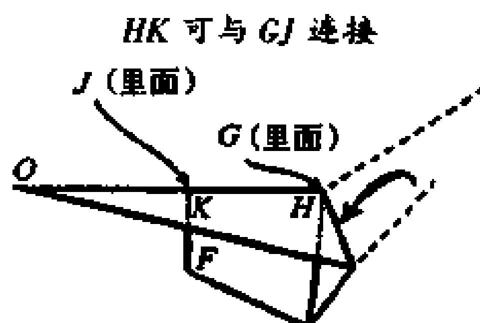


图 25

把 D 向下叠(图 23),且 ED 可与 CF 粘合. 线段 CO 的一部分在模型的背面. 现在我们把 AF 段与 DO 段粘合(见图 18),而且在背面我们有可用来粘合的 FO,但是它的相应的线段 BD 却大部分都看不见了. 我们看得见 DG,而其余部分填满了 GE,它在下方沿自身往后方折叠. 不管怎样,它能够被把握住. 把下面的部分折叠过来(图 24),将 H 带到 G,将 FH 粘合到 DG 上. 把它整个地翻转过来(图 25),并把 HKO 向左边折叠,与 GJ(它
[60] 在里面)并排. 然后将 KO 叠回到右边(图26),这样所要的那些

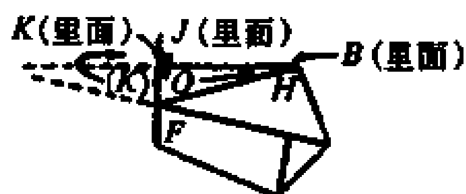


图 26 KO 可与 JB 粘合,从而完成连接

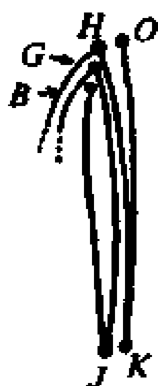


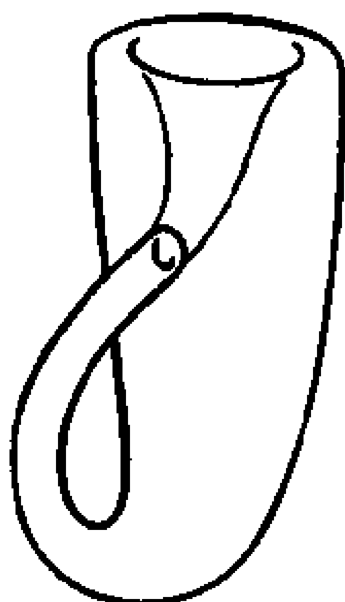
图 27　图26的顶视的边缘图

边都处在被粘合的位置上了.

翻转过来可表现出隐藏的边缘(在图 27 中以图示意),可以看出 *HK* 是怎样与 *GJ* 相粘合的,还有在它们外面,*KO* 与 *JB* 粘合.这就完成了整个连接.所谓圆锥麦比乌斯带不过是个名字而已,除去是麦比乌斯带外什么也不是.α 变窄的结果是把折痕进一步往里面拉,那么,对这个话题就在这里打住吧.也许用精巧的操作人们还能做成这个连接:我把它留给读者.对此,全部的真谛是,当只允许我们用一种形变(弯曲)时,意外的关系持续出现;那么,当允许用任意形变时情况就不一定了;更确切地,那些持续出现的必定是拓扑不变的,只不过它们可能在前面情形下被忽视了. 【61】

第5章 克莱因瓶

像在第 26 页中说过的那样，克莱因瓶自交的地方(图 1)是随意的，在相交曲线上不存在同时处在两个不同部分的点，即同处在细的瓶颈和瓶的主体上．那个带洞的主体部分被假定成没有中断地连续地跨过了这个洞：画在这里，它只是为了便于描述这个模型罢了．



[62]

图 1

随着目光，可以看到曲面的外部与瓶颈内部连结，从而与曲面的所有部分都连通．从瓶顶部边缘我们可以像小虫子那样，可以往下走到瓶的外面，也可向下进入瓶颈从而进到里面．由此看出，克莱因瓶是不可定向的(见第 17—21 页)．不管怎样，从它的

结构或连通性的图示我们可以说出它的这个性质来(图 18,23 页),因为由垂直的那些箭头表示的半扭转把前部与后部连接,而且不管以后的还是以前的连接,也不管有没有扭转,都不能改变这个事实:此瓶只有一个面.

但是,不像麦比乌斯带,它没有边缘:两对边都已粘合因而被消去了.这就是为什么我们像以前所强调的那样(第 35 页)坚持说,必须把所有的对边都粘合好.

问题自然地提出来了:当克莱因瓶被剖成两半时会出现什么情况?是否它会像麦比乌斯带那样,仍然是一整块但失去了单面性?答案取决于它是怎样切的,在哪儿切的.从中间对称地 【63】
切开一个标准的模型(图 1 所示)时,产生了两片形状古怪的曲面,经验证之后知道是麦比乌斯曲面:一个是右旋的而另一个是左旋的或说它们互为镜像(图 2).右边的那个曲面以连续地形变表明它同胚等价于一条麦比乌斯带.

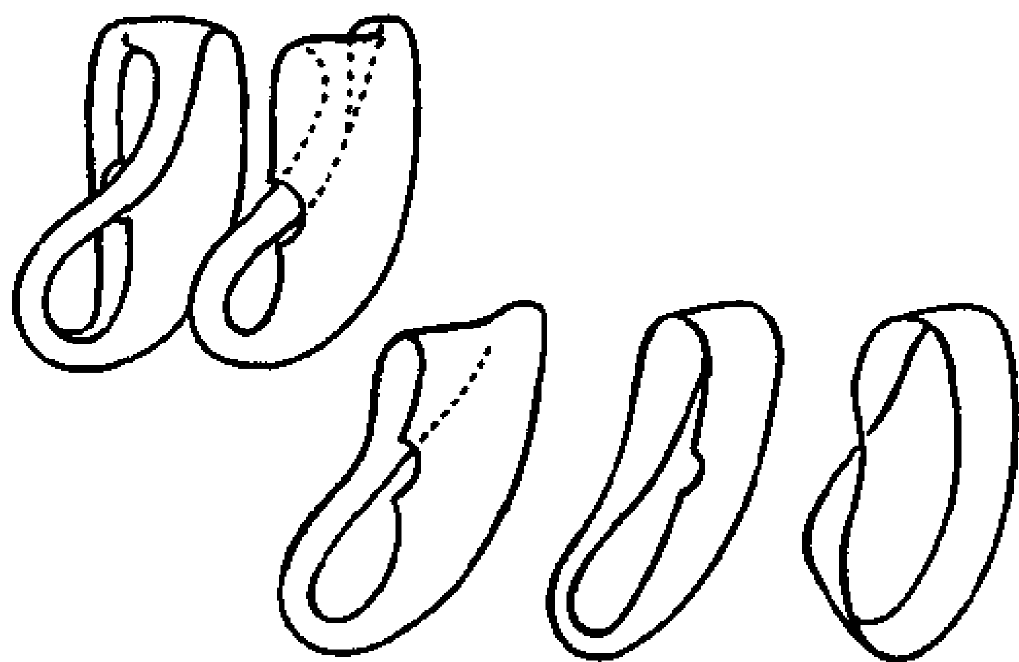


图 2

实际制作一个这样的模型是困难的,故让我们用纸来试一试,作个不同的样子.在第 15—16 页中我们曾指出,一个纸的柱

面即便压平了，它仍然是个拓扑的圆柱．既然如此，我们就回到第25页的图22的模型，看看是否能用纸把它做成平坦的模型．像以
[64] 前一样，我们做水平折叠（图3，图4），它给出了一个圆柱，只是还没有粘合．然后两端被重叠一起，一端放到另一端的里边（图5）．

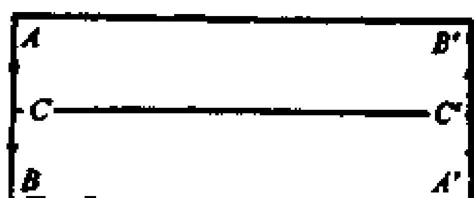


图 3

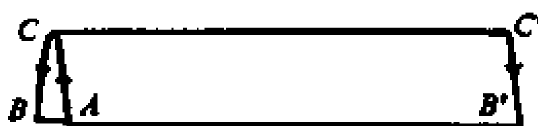


图 4

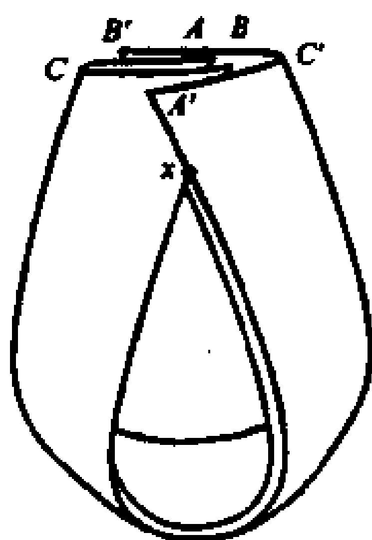


图 5



图 6

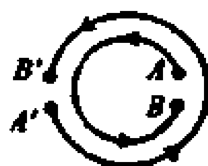


图 7

可以看到，顶角 A'，B' 与顶角 A，B 没有接触，但如第24—25页指出的那样，在圆柱的情形下这是个纯理论的问题；依同样的道理，对克莱因瓶也是如此．A'—B' 的指向（旋转的）正确地与 A—B 并列．从顶部观察这些端线，可以用图表示（图6），而图7也是一样
[65] 的表示出这时顶角 A'，B' 与 A，B 按指向的观点接触．一旦边变成（或粘合成）圆，唯一的判别准则就只有指向或定向了．

在图5中我们把边 $A'C'$ 和 CB 粘合，$B'C'$ 与 CA 粘合，而在

CB 与 CA 间留了一个开口，即克莱因瓶顶部的那个开口. 自交是从 x 到 C 处. 先前没有粘合的两个长边的一段（AB' 与 BA' 在 x 下面的部分，还有里面的在它上面至 C' 的部分）现在可以粘起来了，我们由此有了一个对称的克莱因瓶的纸模型.

如果我们没有作最后的长边的粘合而是把这个没有粘合的地方看作一个新切口的一部分，而这个切口是沿纵向的叠缝 CC' 延续下去的，那么，我们就得到了早先提到的那两个麦比乌斯带：它们互为镜像. 像在第 25 页中那样，我们也注意到在这些麦比乌斯带顶部的那个锐角连结（图 8）以及上面的克莱因瓶，可以（心里想到的是后者）打开为一条光滑曲线.

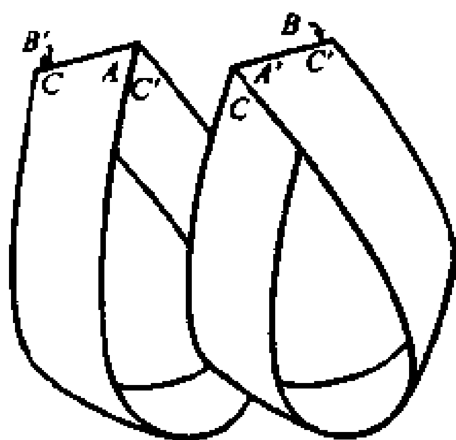
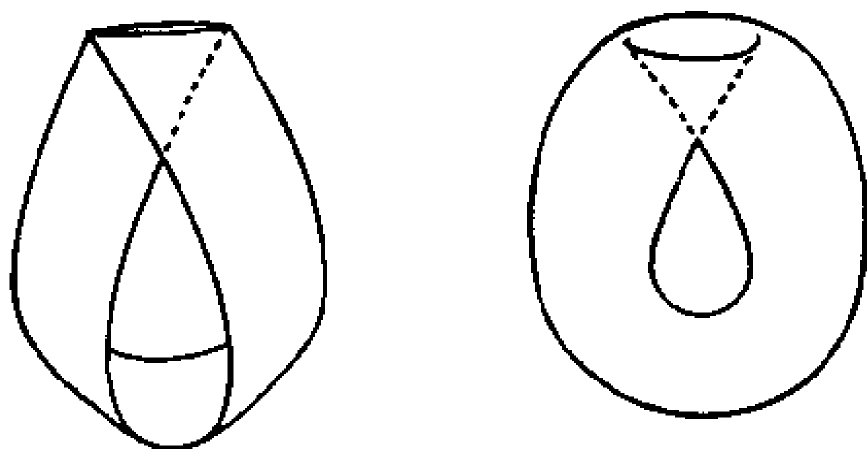


图 8 【66】

图 9 表现了这个模型到更为常见的那种克莱因瓶的同胚形变.



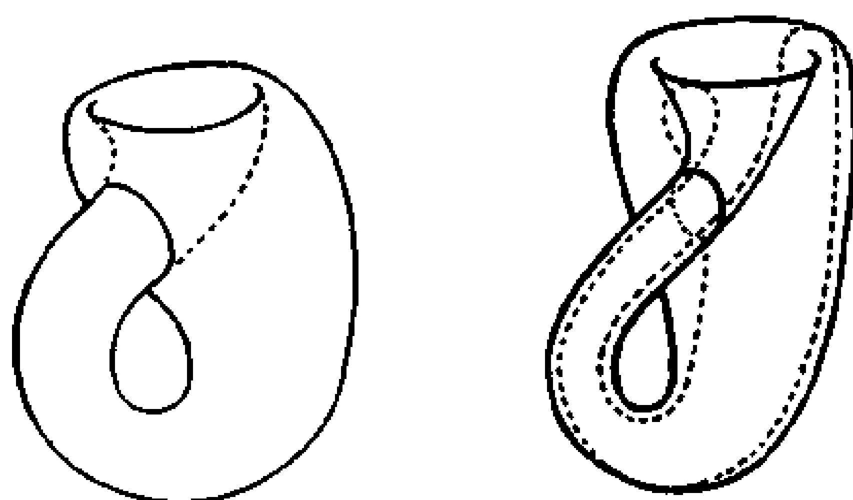


图 9

最后一个图上的虚线表示了要得到两个麦比乌斯带时应该切开
【67】的地方.

记住边 AB 与 $A'B'$ 的正确定向连接的原则;那么让我们用不同的方式来把它们联合在一起:实际上就是按图 7 那样做.这样做意味着对 $A'C'B'$ 部分作了一个半扭转(图 10).我们知道,这没有改变定向,但是在像前面那样粘合 ACB 与 $A'C'B'$ 之后,如果我们现在只是避免粘合 AB' 和 $A'B$,而且只把这个想成是我们的切口,并把它张开,我们就有了一个单个的麦比乌斯带,一个纵向折叠的,且在 AA'—BB' 具有锐角形横向叠缝的带.

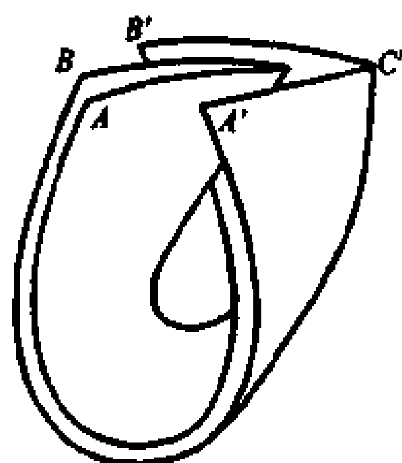


图 10

要转换成常见的模型，这个切口找起来有些难于捉摸：它在图 11 中被表示出来；我们可以看出它没有把克莱因瓶分成不相联的片段. 我们在图 12 到 14 中展示出它被逐步打开的情形. 【68】

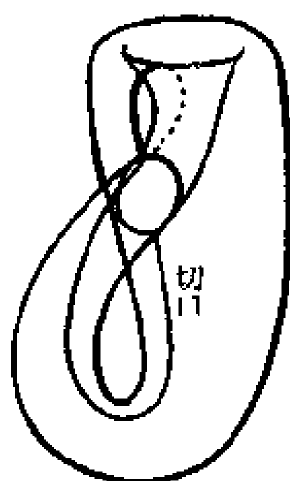


图 11

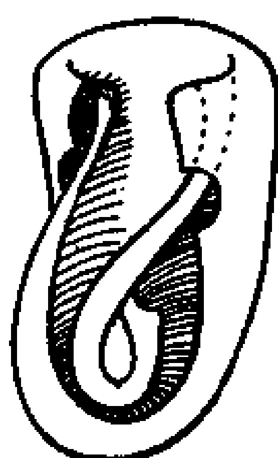


图 12



图 13

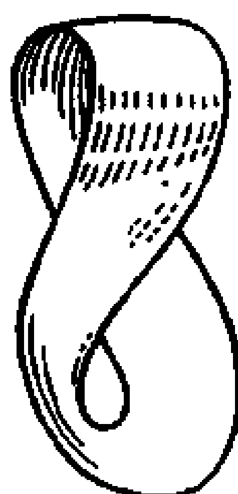
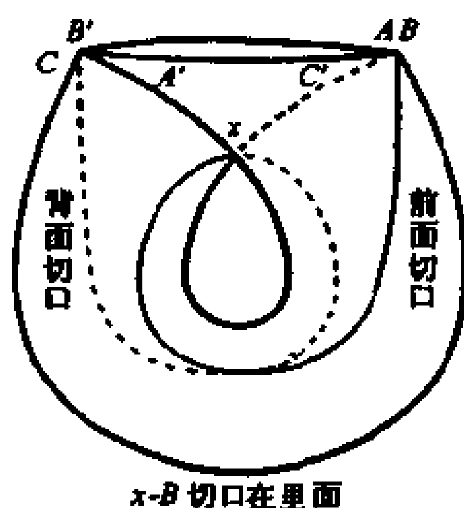


图 14

用这个方法还可以做另外两个实验. 已作过的切割是沿着自然的或明显的现成折叠线或边进行的. 如果对角地，或更准确地说螺旋地进行切割，会发生什么呢？让我们取我们所做过的第一个模型，即那个切开时给出两个麦比乌斯带的模型，就这一【69】

次，切口由右手边的顶角 $AC'B$ 开始，而后往下，并绕圈而行，最后往上到 x，而不像从前所做过的那样一直到 C. 这个切口必须只在面对我们的表面 $A'C'$—CB 上，否则任何非常有趣的事都不会发生(做一做，看一看). 然后，在曲面的背面 AC—$C'B'$，我们作另一个切口：从 C 开始，往下并绕圈而行，再往上到 x. 请记住，我们这样做时所使用的模型已经做过了所有必要的粘合，而且在作第二个新切口，当我们达到 x 时，我们是在相交的地方；而在 xC 部分粘合便停止了. 但是在作第一个切口，当我们达到 x 时，我们必须在里面继续走到 B(图 15).



x-B 切口在里面

图 15

我们已经做过的是构造了两个分离的切口：每个像一个圆
[70] 圈那样自交，但是从一个真正的克莱因瓶的观点看，并不是真的彼此连接，因为它们只是在相交处彼此通过，而且在作为整体的曲面上它们处于不同的部分. 结果使人十分意外：这两个切口仍使克莱因瓶为一整块，我们发现它有两个面从而有两条边. 将可以看出这个确实等同于第 47—48 页上的切割，得到了一条麦比乌斯带；那么，可以期望以一个纵向切割得到单个的圆圈.

好像这纸是橡胶做的一样，我们把图 15 的下面部分作个形变；这条折叠了的带子不经透视只是上下左右的转动便被平摊

开，这两个切口成为这单一的一片的两条边.图 16 表示了这些切口到通常模型的转换.可以看到其中一条切口穿过那个理论

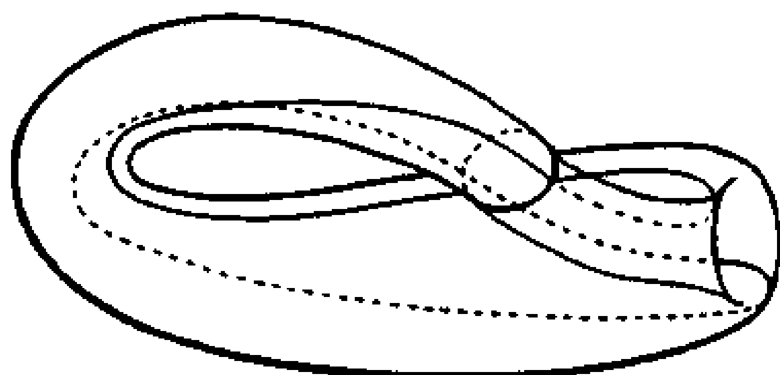


图 16 【71】

上的相交处，从而，在这里沿洞口的任意闭曲线绕瓶颈在里外两面行进.(瓶颈并没有与洞口的边缘重合在一起.)如果读者有兴趣按上面的路线做一个非平坦模型，除了用玻璃吹制以外(在实际却不能切割)最好的就是像图17的纸模型了，虽说比起一个

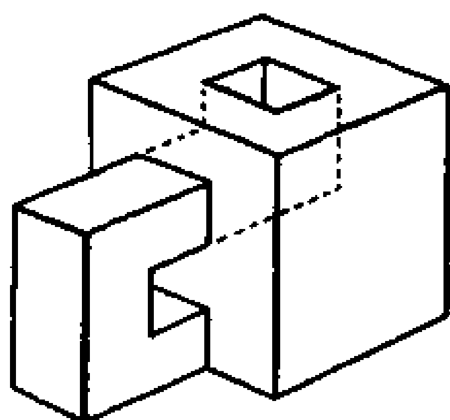


图 17

光滑的克莱因瓶来它更像一间蒸气浴室，但它在拓扑上与后者是一样的.它还有可被切割的好处(可以想象，这就是第 24 页上所说的那个人在那里穿上从里翻出一只袖子的外套时所在的浴室).它的构造的比例模型可在附录中找到.

剩下来的第二个实验是作 $AC—C'B'$ 和 $A'C'—CB$ 的边缘 【72】

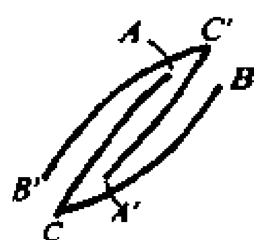
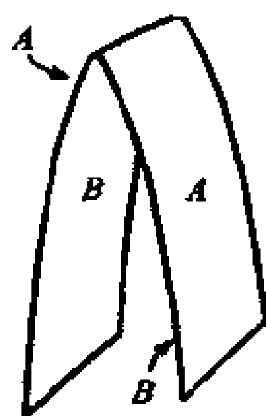


图 18

连接，但使边相互交替．顶视图 18 给出了方法，而用通常的模型非常难于把这个具体化．我们称之为瓶颈的那部分不再全在主体的内部了：每部分的一半在内部而另外一半在外部．对于一个理想的，想象中的克莱因瓶，就一方面而言，内部连结到外部的方式并无差别．像图 19 表示的那样，对这两个平面的每个都标注上 *A* 和 *B*，以表明要相连接的两个面．当连接如左边的图那样时，则 *A* 粘合 *A*，*B* 粘合 *B*．图 20 表明，仅仅颠倒了位置并不影响它：*A* 仍与 *A* 粘合，*B* 仍与 *B* 粘合．但是，当我们按这种方式做了一个模型并像对第一个模型那样（第 47 页）对称地切开边或折缝时，我们得到了两条相同的麦比乌斯带，而不是两条互为镜像的带．另一方面，当我们像在第 48—49 页那样进行对角或螺旋式切割时，其结果是一条带，两条边，两个面和两个半扭转（其理由可在后面看到）．

以标准的模型来表现作在曲面上的切口是毫无意义的，因



[73] 图 19

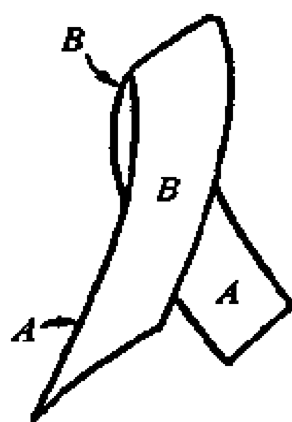


图 20

为它不再能给出新的相交状态的真正图形.最接近于沿光滑曲线折叠而成的麦比乌斯带由图 21 表出:像其他的一样,它只有一个面;但连结和相交所遵循的规则是非常随意的.它实在不属于高雅的拓扑学的圈子,利用它只会惹怒了那些不赞成纸模型的数学家.(它被称为患腰尖盘突出的克莱因瓶.)

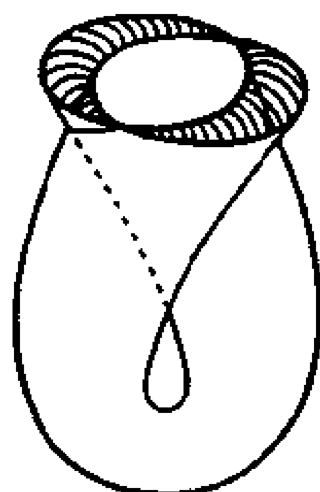
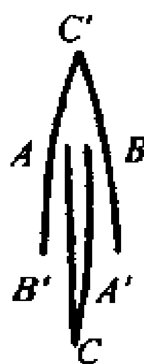


图 21 【74】

让我们把我们已做过的各种模型及切割后得到的块状物都一一列举出来.我们用以前使用过的连通示意图的方式来做到它.请记住,模型中连结和切割角度的不同安排不会影响这些克莱因瓶,只有我们的切割方式才有影响;但有一个例外,即腰尖盘突出的那个.每个模型及其切口的示意图表出如后.

1. 第 45—46 页:沿 AB' 及 CC' 的一个切口.给出了两个麦比乌斯带,互为镜像(图 22).



接缝的顶视图

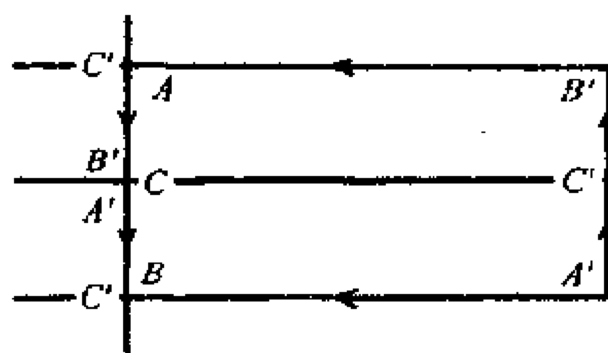


图 22 【75】

2．第 48 页：1 个切口（AB'与$A'B$没有粘合）.给出 1 条麦比乌斯带（图 23；见后面的注解）.



接缝的顶视图

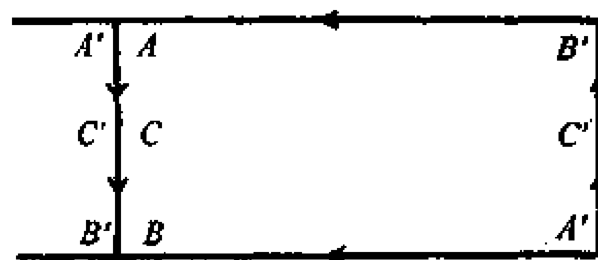


图 23

3．第 48—49 页：2 个切口，Cx'和xC'.给出 1 条带：2 个侧面，2 条边，4 个半扭转（图 24）.



接缝的顶视图

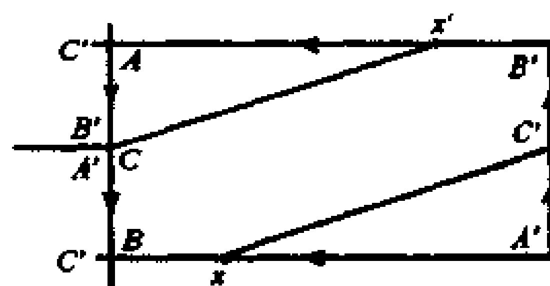
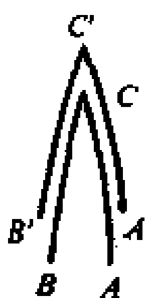


图 24

4．第 49 页：没有表示出.切口穿过两个表面，给出一条波利尼西亚（群岛）的独木舟形状的东西（图 25）.



接缝的顶视图

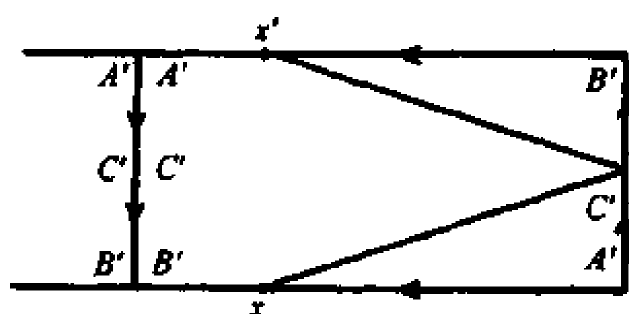


图 25

5. 第 52 页：沿 AB' 的一条切口，但是因为 AC 与 $C'B'$ 相粘合的指向与 CB—AC' 的粘合的相反，它给出了二条具有相同定向的麦比乌斯带，即它们一模一样(图 26).



接缝的顶视图

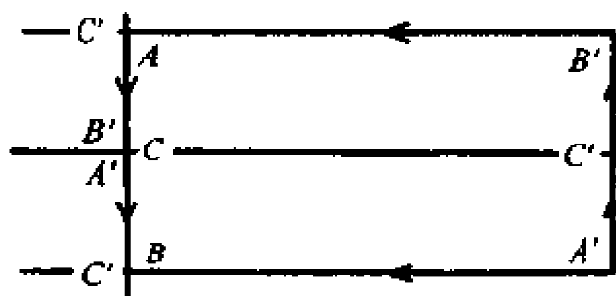


图 26

6. 第 52—53 页：2 条切口 CB' 和 xC'. 给出了一条带：2 个侧面，2 条边，2 个半扭转(图 27). 当打开来且压平后，给出的折叠如图 28 所示.



接缝的顶视图

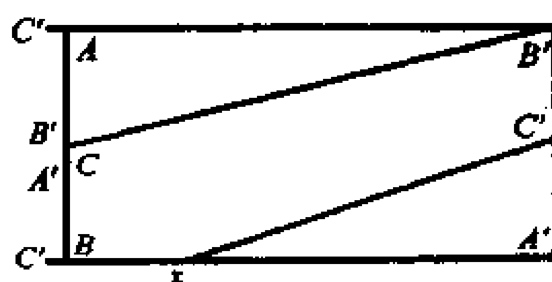


图 27

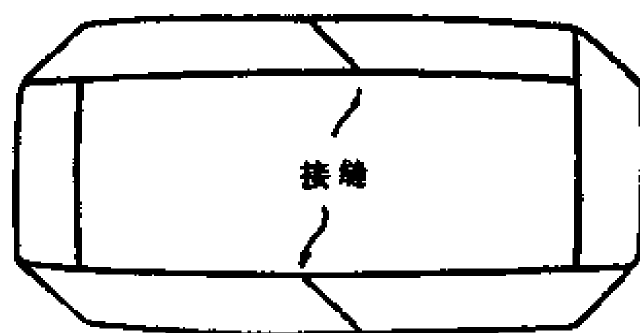


图 28

第6章 射影平面

就克莱因瓶而言，我们不得不在比例方面作点手脚以克服在相交方面的困难，但对射影平面，相交则是绝对的，不可避免的，而且涉及到所有的对边. 这是因为两对对边都以半扭转连接. 可以做成一个纸的或类似的模型，但要遇到极大的麻烦，而且一旦做成便不可能打开，不像是方形麦比乌斯带那样. 人们唯一能做的是说“哎呀！”.

问题中所提到的模型的制作方式与作正方形麦比乌斯带的方式相同，但是我们不但要像第 30 页中那样跨过插入的边去粘合 AB 与 $A'B$，而且其余的边（在两层折叠中）也要粘合，就是说，要穿过第一个的粘合处. 要做到这点，我们必须借助于图 1
【78】中所展示的技巧，它旁边的图给出了这种假相交的一个小型样本. 对拓扑学家来说，这里似乎有一个这个模型的合法性问题：相交部分的自交点 x 有点疑问，它可能是使完全圆形的眉毛扬起来的原因. 如果在射影平面中有一个洞，哪怕只是去掉了一个点，它就可以变形为一条麦比乌斯带，正如球面在有一个洞后可变形为平面一样. 但是，这个变形并不像通常的那样：它涉及到组成整个曲面的径向直线，这些直线相互穿越. 在挖好这个洞时（但我们还没有开始作扭曲），这个曲面就是被称作交叉帽的东西.

在某种意义上说，我们可以在图 1 中仅仅切下角 y 就能做成一个交叉帽，但使它形象化的更好办法是想象（或者去制作，

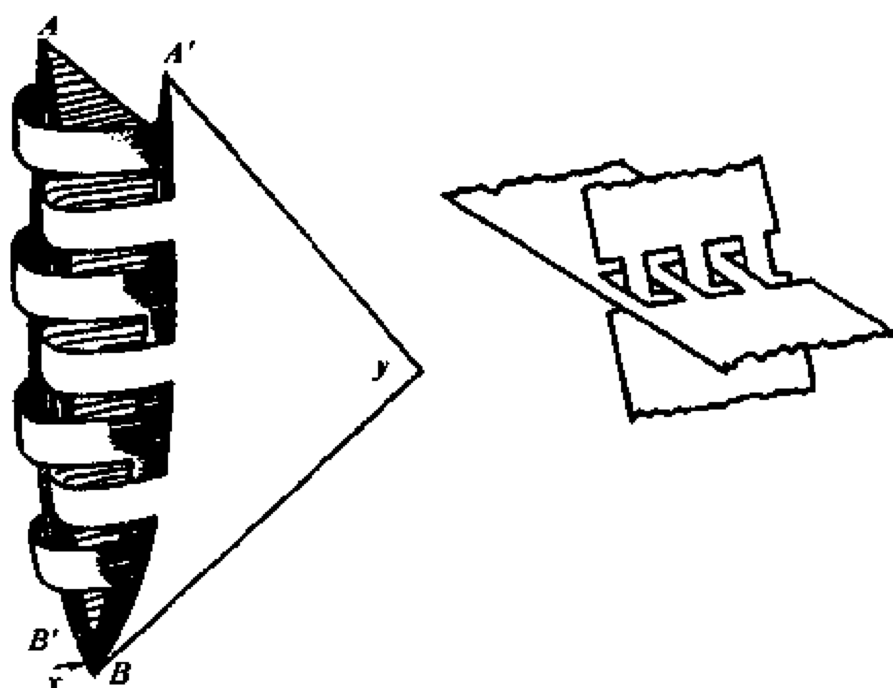


图 1 [79]

但相当之难)一条麦比乌斯带,它的边是由十分粗壮的电线所构成,而曲面由一股股非常具有弹性的橡胶线所替代,譬如是由薄橡皮带切割而成的;这些线相互交错地绷在上面.图 2 表示了这种布局.如果在电线边上标上数字使每条边上相对的两点其数字成双出现,那么我们可按图 3 表示的方式打开这条电线,这时

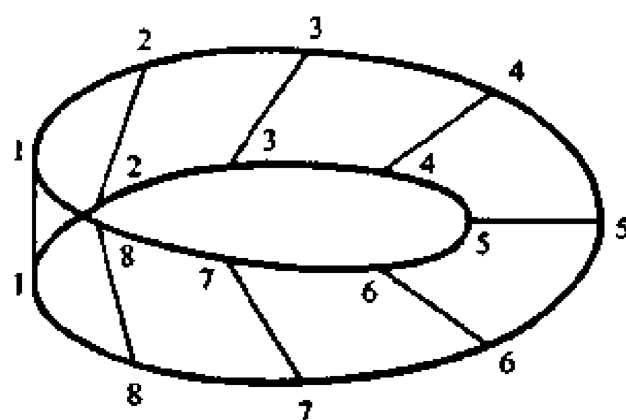
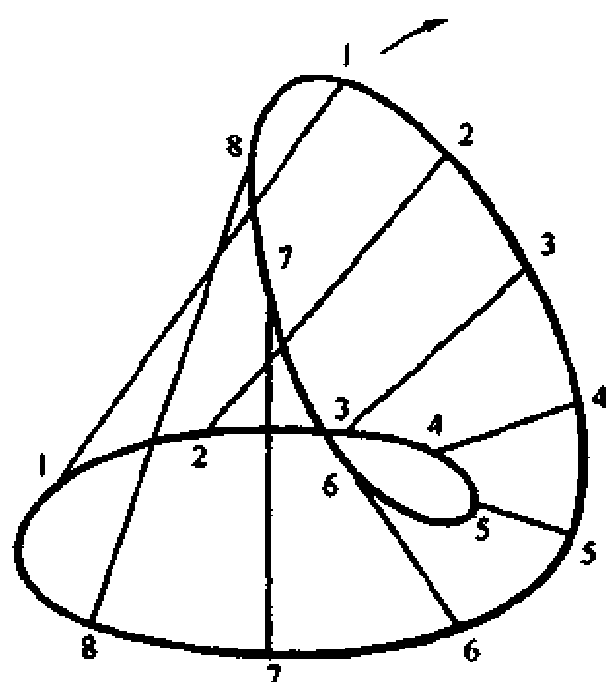


图 2





[80] 图 3

橡胶线被拉开,然而可以看到(图4,图5),当我们把它趋向一个圆形时,它们不得不相互地穿过电线.如果我们设想它们已经做到了这些,这时有一个由电线做好了的圆,每一条橡胶线都是直

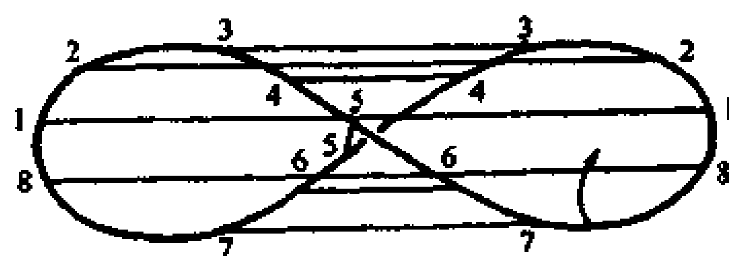


图 4

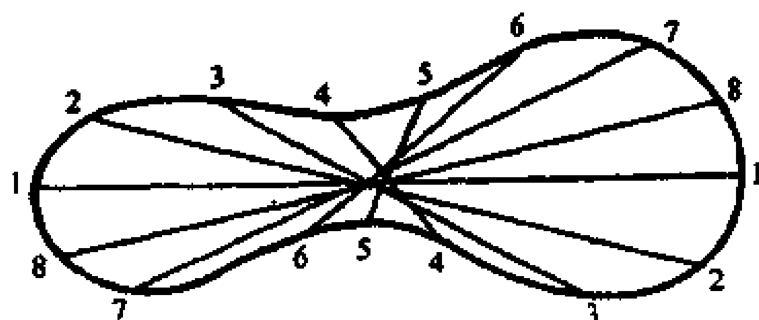


图 5

径.因此这些线被拉伸了相同的程度,而且如果我们设想它们都是真正连续的且侧面相互连接的,正像是当它们构成原来曲面时它应该的那样,那么我们现在就得到了一个电线边缘的橡胶盘(图6).它没有对应于圆圈的洞,像以前那样有一条边,一个面.

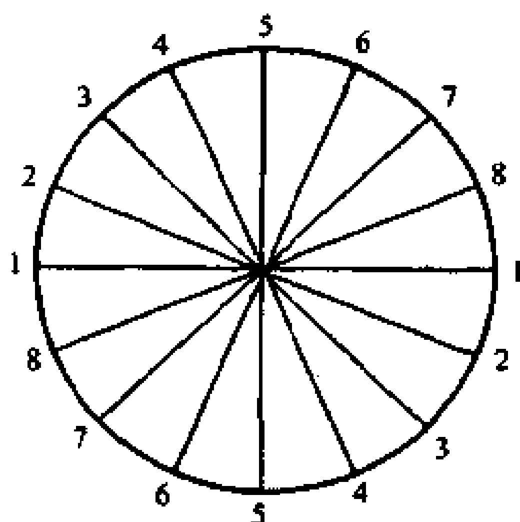


图 6

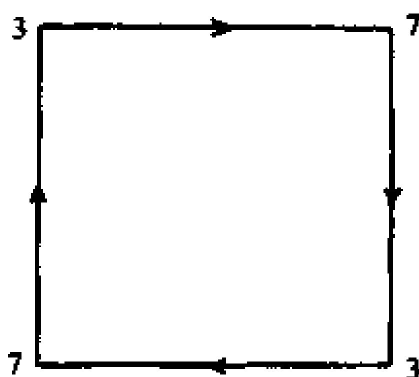


图 7

这是因为如果检查一下新边的定向,我们会看到这些数字运行的方向是使它的相对部分可经半扭转相连结,这说明这两个面
相连通.现在我们把这圆盘变形成一个方形(图 7),而这些数字 [81]
表明它的连通是按照连接射影平面边的方式连通的.我们现在要做的只是把这个正方形放在球的面上,就像一块补丁一样,我

们便有了一个多少有点扭曲了的射影平面:实际上是带有一个交叉帽的球面.

所有这一切的意义似乎有点微不足道,但我们紧接着要给出一个运用模型的例子,它把它们表现为分析形状的工具,同时也展现了它们自己.

对　称　性

从现在起我们把给麦比乌斯带的“半扭转”就称为“一个扭转”,这是因为带子只被翻转了一次,“扭转”这个词已足够清楚
[82] 了,而且避免了用字的麻烦.

由模型提出的一些问题不仅在点集拓扑学中难于回答而且甚至于没法提出来.例如,为什么只有一个扭转的麦比乌斯带,当沿中间的轴线切开时得到一个有 4 个扭转的圈? 还有一件至少可以说有点古怪的事:圆柱和环面是对称的而麦比乌斯带却不是,因为它可以是左旋的也可以是右旋的.当然圆柱和环面也可以做成非对称的,但关键是它们可以是对称的.而一条麦比乌斯带,至少是它的模型,却不可能做到.同时,一个克莱因瓶可以切成一条单一的麦比乌斯带,既可以得到左旋的也可以是右旋的,这取决于我们切在瓶颈或相交部分的那一面.射影平面又怎样呢?

马丁·加德纳送给作者一只小纸模型,说它是个射影平面.它看起来简单,容易制作,像一朵清纯的蘑菇.它展示在图 8 到图 11 中,而这个以及后续的模型应由读者来制作了.

图 8 的方形纸上有两个切口,xx'—ee' 和 yy'.在图 9 中,右半部 BA' 沿虚线叠向左边;B 在 A 上,A' 在 B' 下.要做到这点,
[83] 须将切缝 yy' 塞进 xx' 里.在图 10 中,底部的纸瓣 B' 往上叠到 B,而在图 11 中,纸瓣 A' 往上叠在 A 的后面.现在纸瓣 A 的顶边和左边的边与 A' 的相粘合,对于纸瓣 B 的顶边和左边的边与 B' 的也作同样的粘合,还把切口 ee' 的竖直部分的边重新粘合起

来.没有粘合的边 xx' 与 yy' 被看成是没有切割的面 z 及 z' 的交,事实上可以如图1那样作部分粘合.

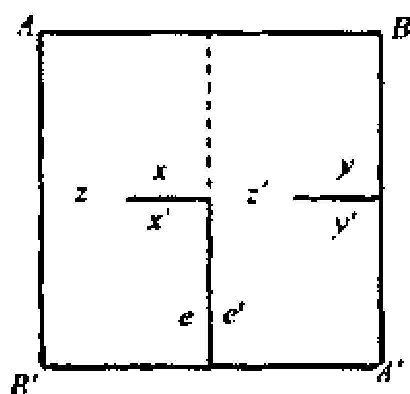


图 8

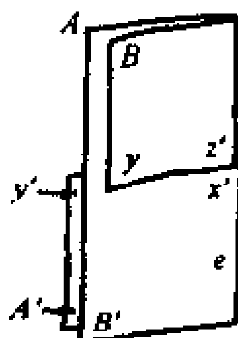


图 9

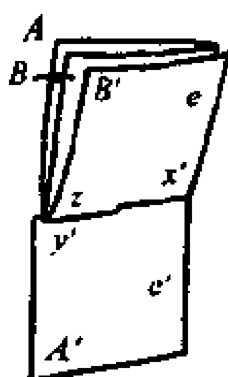


图 10

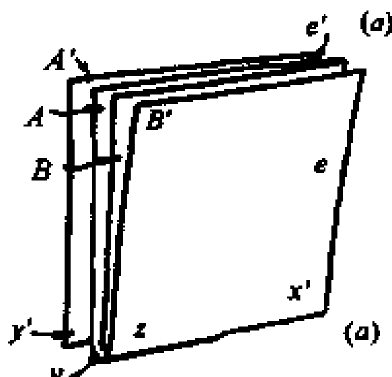


图 11

检查的结果指出图8中正方形的每对对边都经扭转而粘 [84]
合,而且切缝 ee' 也被重新连接.因此,如果我们许可不完美的相交,就像是在克莱因瓶的模型中我们作过的那种相交,那么,我们就得到了一个射影平面.似乎一切都完美了,然而 BA' 边的一半在前面,另一半则在 AB' 边的后面:可以这样吗?让我们做个实验.

我们将只作顶边 AB 与底边 $A'B'$ 的粘合.如果用的是一个非常窄的长方形的话,事情就更清楚了:图12表示出它的面、切

口并标以同样的字母．在 AB 与 $A'B'$ 粘合后（当然，我们没有忘记重新粘合 ee'），它应该是一条麦比乌斯带，然而当我们试图把它打开时，它有了一个最不标准形状：图 13．或许它是一条伪装了的麦比乌斯带，一个与它同胚的曲面？

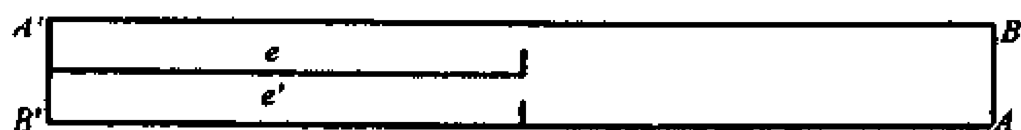


图 12

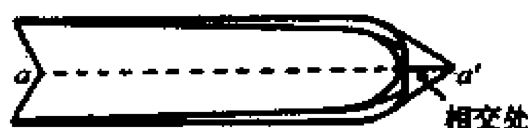
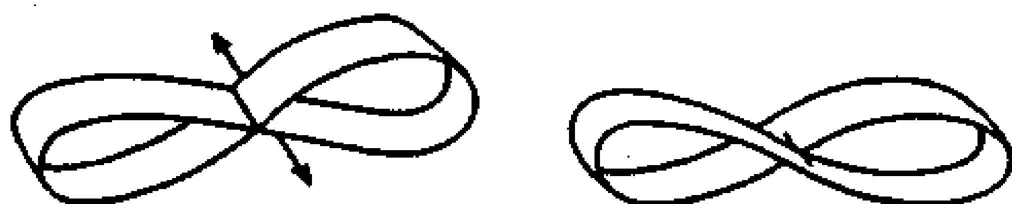


图 13

现在我们把它沿中心轴线 aa' 切开，它是图 11 中 aa' 拉长
[85] 了的结果，由此我们应该得到一个单一的 2 面 2 边具有 4 个扭转的圈带．但是我们却得到了图 14，而且当我们从侧旁把它拉开（松开相交处）时我们只找到两个扭转．必定出了些毛病．



拉开之后

图 14

我们重复这个实验但只连结另外一对边 AB' 与 BA'，而且这次所用的是另一方向为窄边的矩形，即图 15．在重新粘合 ee' 后，我们沿 aa' 切割，结果得到一个没有扭转的圈带即一个圆柱．出了什么问题？不错，我们首先用通过相交处的切割解除了相交，但为什么这就消去了扭转呢？

让我们回到在图 16 到图 19 所表示的加德纳的正方形形状吧．当我们先把切缝 yy' 塞进 xx' 中（图 16）时，我们避免了把纸

张弄出皱折.然后我们把 A' 重合到 A 的后面，B' 到 B 的前面(与 ee' 不相连接)，从上面看(图17)它是一个双层的圆锥.在图18

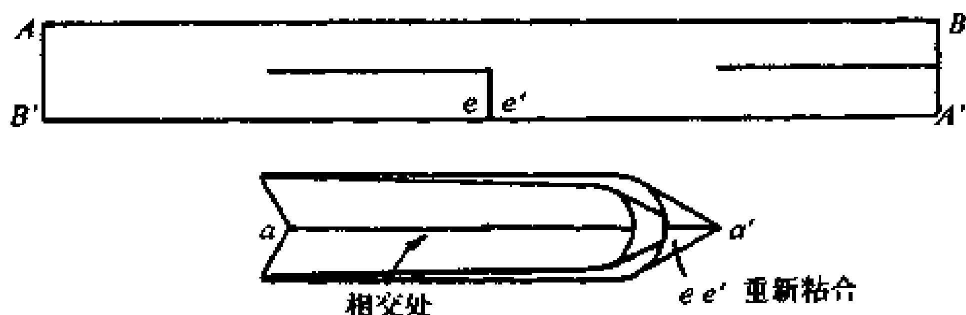


图 15 [86]

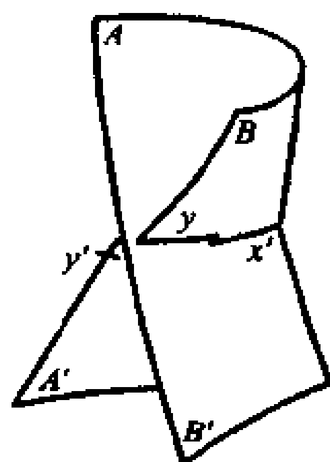


图 16

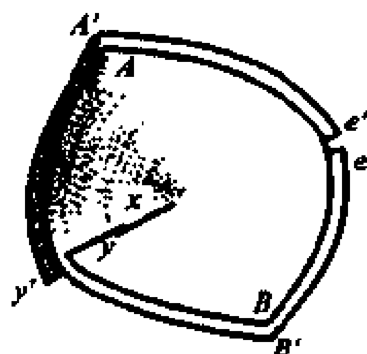


图 17

中我们已切下了角 AA' 与 BB' 以得到一个具光滑边缘的圆锥.它与图 11 的图形同胚相等.我们再把它打开，就得到了图 19 的圆盘.这就提示我们，可以在原来的正方形模型中作些改变，见图20：虚线表示原来的边的位置.像前面一样的折叠给出了边

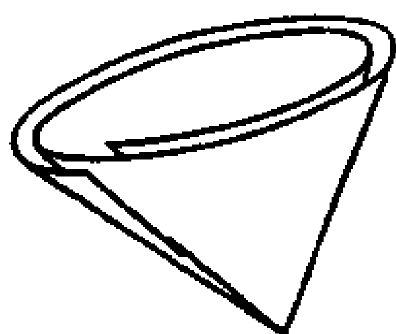


图 18

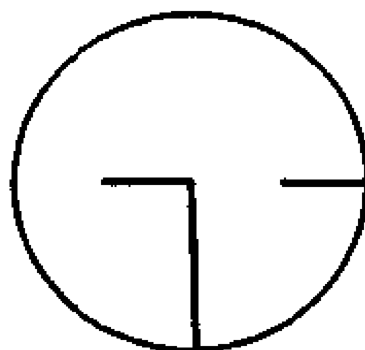


图 19 [87]



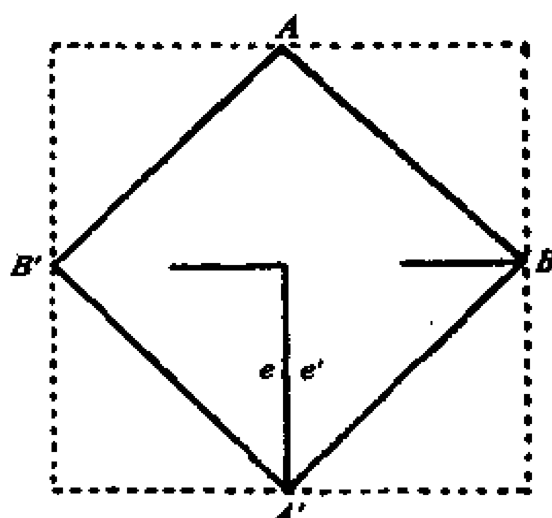


图 20

的一个新排列，这时没有一条边一半在一条边的前面而另一半在它后面．当我们作上面同样的实验但每次只粘合一对对边时，我们则得到一个稍许不同的结果．这次我们必须用正方形的模型，因为拉长了的形状对于新的对角线切缝而言没有多少好处．这次在两种情形下我们都得到一条有两个扭转的圈带，没有圆柱出现．

非常难于看见我们对正方形模型在做的事情，然而用一支铅笔我们能够描摹它们并算出扭转的次数．由于这次没有沿相
[88] 交处切割，所以我们不似以前那样得到圆柱就不足为奇了；但是，为什么是两个扭转而不是四个？我们再来试一试．

在图 18 中，我们用切掉角使边缘光滑的办法来消除了这一对粘合过对边的边之间的区别．理想的射影平面没有折角，一个交叉帽也没有——第 58—59 页中打开一条麦比乌斯带后生成的曲面没有折角，虽然说如果它有的话它依旧是个交叉帽．所有这些形式的理想形状都是完全对称的，甚至一个麦比乌斯带也如此，虽然它似乎有点古怪．让我们取图 18 的光滑圆锥，并加大纸张使其平展．沿虚线（图 21）把它切开，切透两个纸层，拉开，装上 V 形衬片（图 22）．如果这些足够宽则此锥可变作一个圆盘而这时并没有作过任何拓扑变形．我们将得到沿平坦螺旋线

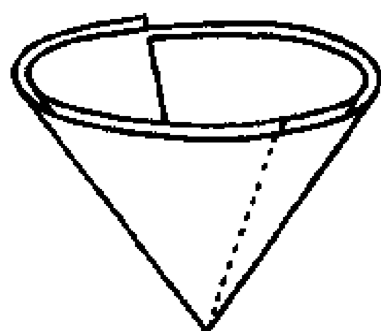


图 21

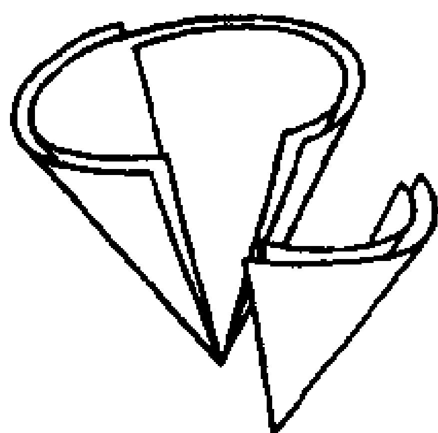


图 22

旋转的两层，相交处是一条从中心到边缘的径向直线，图 23.如果从两个圆盘出发，每个沿半径切开而后粘合，这样制作起来【89】

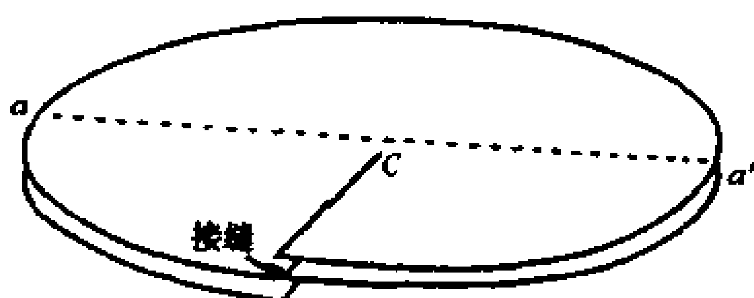


图 23

要容易一些.我们把上部的圆形边缘与下边曲面的圆形边缘粘合可以把它做成一个射影平面.直径 aa' 恰好超过中心 C，也就是相交线的末端的那边；如果我们现在沿 aa' 切开，便得图24

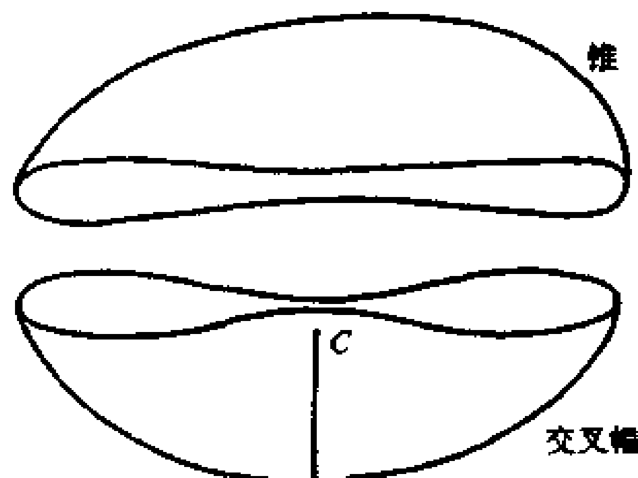


图 24

表示的那两片曲面，这时外部的边缘已经粘合好，并把它们偏向一边便于观看．下半部是个交叉帽而上半部是个拓扑圆盘．正如
[90] 我们在第 59 页中所说，把一个交叉帽安装到球面的一个洞上就得到了射影平面，而我们的圆盘拓扑上就是一个带洞的球面，所以在切开 aa' 之前，我们所得到的是个射影平面．

这里的区别是，第 58—59 页的交叉帽是平坦的，单层的，相交处集中于中心点——但是我们不能实现它．它相对平面中某个点对称；但是现在的这个却不对称，这也不比我们制作的克莱因瓶更不好——我们必须尽全力来处理相交．它们和我们刚才做出的模型都对称于它们上面的一条直线，或 3 维空间中一个平面，但一条麦比乌斯带则不是．让我们离开正题去看看另一种情形，这时相交不只是没有能准确地表示出来而是完全避让开了．

在第 35 页的图 2 和图 3 中，我们展示了用十字形纸条做成的非常不完全的克莱因瓶和射影平面的模型：不完全性是因为要求它们的所有的对边都被粘合而产生的．依相似的方法，我们可以用在面上切开个长口子的办法来粘合一个正方形麦比乌斯带，见图 25．P 是个微小的未切割部分，容易作绕它的扭转；但是它的部分轮廓线是切口，故而它不是规规矩矩的．是否在加德纳模型中的切口 ee' 与它属于同一类型？很难说，因为它能作重
[91] 新粘合而图 25 的切口在粘合 AB 与 $A'B'$ 后则不能．尽管有这些不足，后者在沿轴 aa' 切开后将给出一条具 4 个扭转的圈带．

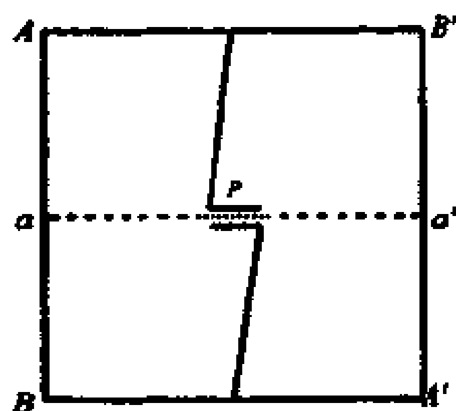


图 25

现在我们将对第 35 页的十字形模型作一个轴向切割，并重新画在这里；但它们被压平了以便清楚地表现出扭转，而扭转在这里成了折叠：见图 26 和图 27. 这些都是射影平面，图 26 的对称表现在一双纸臂以左旋式扭转相连接而另一双则以右旋式扭转相连. 图 27 中，它们以同样的方式扭转，都是左旋的. 在沿虚线切开后，图26给出了两个相链接的圈带，其中一个具有两个 [92]

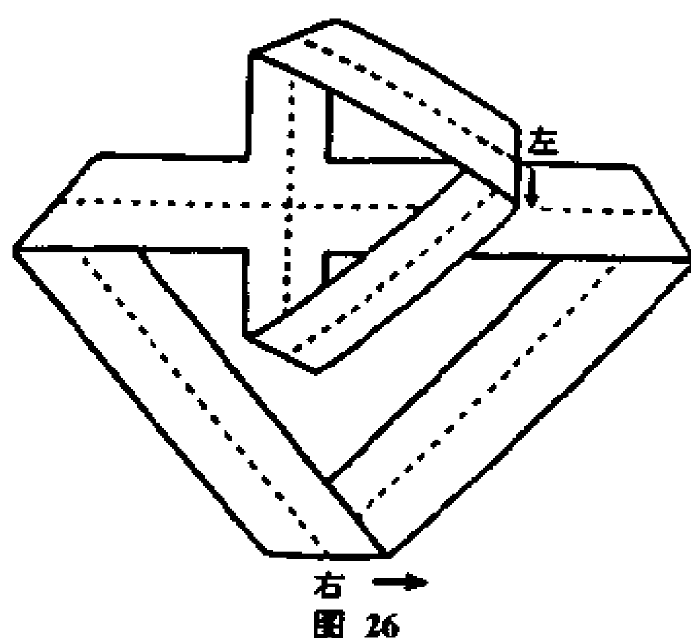
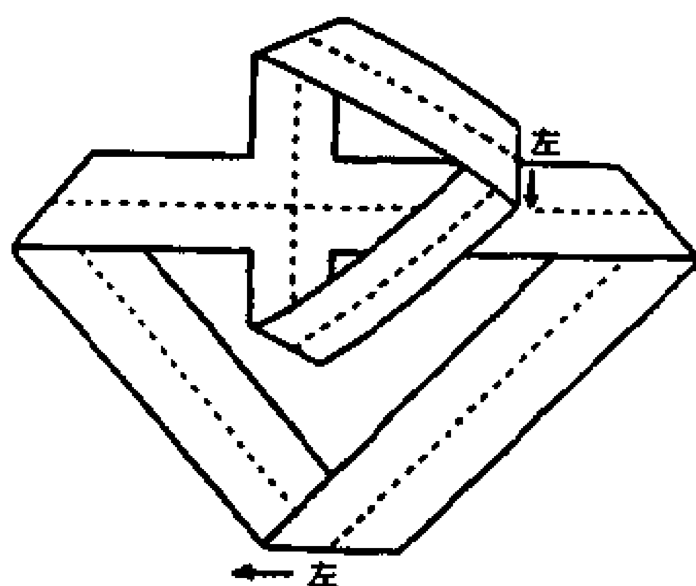
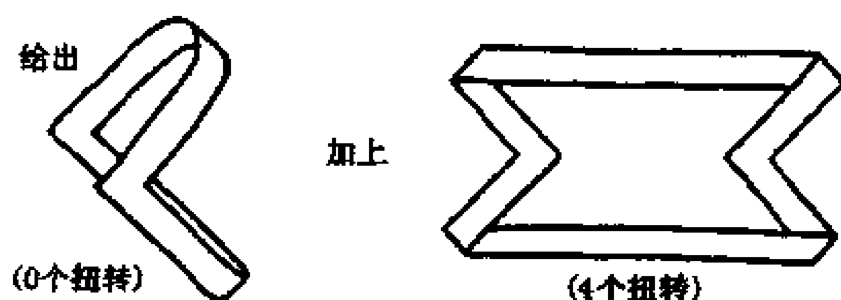


图 26





[93] 图 27

左旋扭转而另一个有两个右旋扭转．注意，是两个而不是四个．

沿轴向切开图 27 给出两个不链接的圈带（图 27 旁边的图形），一个具四个扭转而另一个则无，是个圆柱．这一串的实验使我们联想起加德纳模型，并提示我们：它是对称的．当我们对加德纳模型作某种程度上深入骨骼的彻底修整，图 28，把它做成十字型但不作任何扭曲时，很清楚，这两对边以不同的方式连接：左旋和右旋．（在修整中，聪明的办法先作出折叠的折缝．）在读完这章之后，读者可能要试一试连接十字模型相邻的纸臂而非相对的纸臂，并加以各种扭转和切割．有些结果是十分稀奇古怪的，我们让读者自己去决定它们是什么．

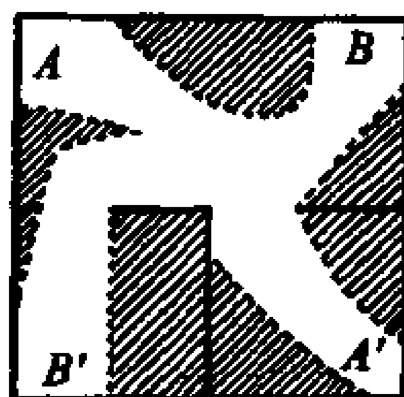


图 28　去掉阴影部分

我们仍旧没有解释，为什么这些模型中有些在切割后只给出两个扭转，但是就此而言，为什么一条麦比乌斯带却给出四个扭转？而在切割之前，它却都只有相同的扭转数：一个．让我们

做一个平放的麦比乌斯带,图 29. 在 C 有一个边的自交处,它在同胚允许下的扭曲甚至于切割而再粘合下都不会被去掉. 像我们 [94]
早先说过的,同胚变换允许我们作暂时的切割,只要我们把原先连通的地方点对点地重新连接起来. 因此,一个右旋麦比乌斯带可以经切割和重新连结变成一条左旋的,甚至于对于多于一个扭转的麦比乌斯带也是如此,只要扭转的个数是个奇数就行了.

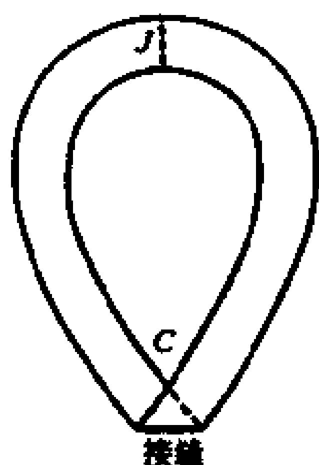


图 29 由在 J 连接的两片组成

当图 29 沿轴切开并稍稍拉开一点,即图 30,我们看到,原有的扭转表现在了两个地方 A 和 B,分给了这个新圈带的两个扭转,但是也有一个圈带的自交处 C',它对应于图29的交叉边

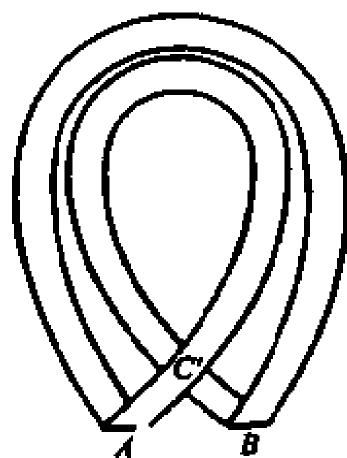


图 30

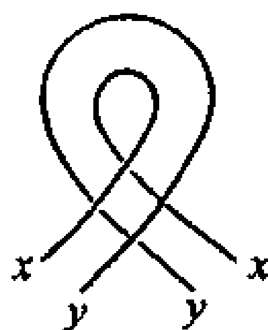


图 31 [95]

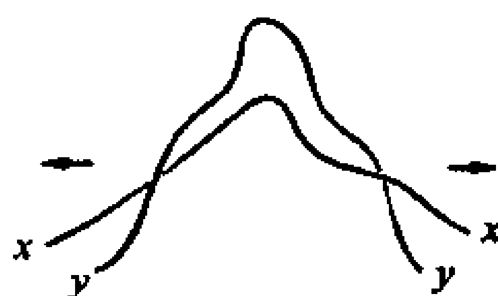


图 32

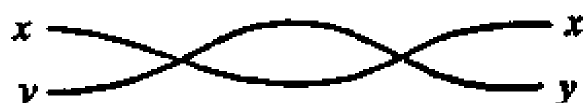


图 33

C. 我们现在考虑新的交叉部分 C′及两条凸显出来的边 x 和 y，图 31 到图 33. 我们按照箭头拉开它，发现得到了另外两个扭转，把它们加到第一次的两个上给出总数 4. 似乎原先给予麦比乌斯带的扭转不是孤立的：有其他的扭转只不过隐含在边互相交叉这个事实中，而这种交叉构成了我们所使用的未扭转，未粘合两边的新连通性. 这个隐藏的扭转似乎并非有形的扭转动作.

如果我们用许多纸条并给予它们以不同数目的扭转，然后
[96] 粘合再沿轴切开，再一次计算扭转数，我们就得到下面的表格：

切割前	切割后
1	4
2	4
3	8
4	8
5	12
6	12
7	16
8	16
9	20
10	20

等等.

注：当切割前具有大于 1 的奇数个扭转时，所得到的切割后

的圈带将含有一个纽结，扭转数越大则越复杂．其意义在后面将加以阐述．

在每种情形，对每个奇数次扭转增加一次后并不增加切割后所得扭转数目：最终的数目是两条圈带中扭转数目之和，而这两条圈带是由切割一条具偶数个扭转的麦比乌斯带得到的．人们预计这个数目是原来未切割的具偶数扭转的圈带的扭转数的双倍，因为切割仅仅给出了两条新的圈带，每条带都与未切割时的形状相同．改变了边在原来未扭转的带中的连通性显然抵消 [97]
了对奇数扭转加上的一个扭转．从而，每次从奇数到偶数的增加时我们没有改变，而每次从一个偶数增加到奇数时，我们得到了4个新的扭转，就像我们刚开始作第一个扭转的情形那样，但是不包括由一个奇数到下一个奇数那样加上了两个扭转．这似乎表明，在奇数范围内我们按照实际加上的扭转数来作出真正的扩展，即按切割加倍，但总要加上最初的那两个额外的扭转．虽然复杂却合乎逻辑．现在我们必须解释，为什么加德纳模型仍然给出两个扭转而不是四个．

回到纽结的情形：在超过3个或更多的奇数个扭转时要计算出扭转的个数是困难的，除非我们搞清楚了这些东西．仅仅是一条带绕着另一条带的扭转不必是这两条带各自的扭转．图34表示了两条切成蛇形轮廓的纸条：把它们做成相互上下穿越的形状，但是没有一条自身是扭转的．在图35中表示了由单个纸带做成的类似东西，而要把模型做成平面的，我们需用两片纸贴在一起．瞧起来它显然没有扭转，但是外观是靠不住的．可以自身不加扭转而成为图36所表示的样子，而我们立刻看出它与图31到图36是同样的：不管它的波浪形状，它就是一个圈带，它

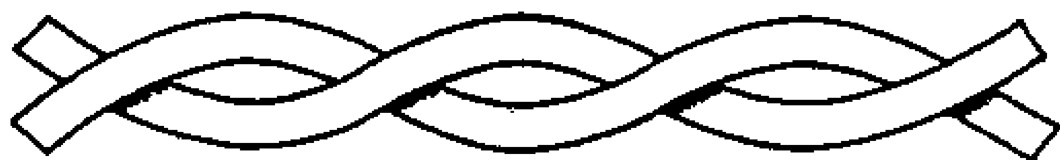


图 34 [98]

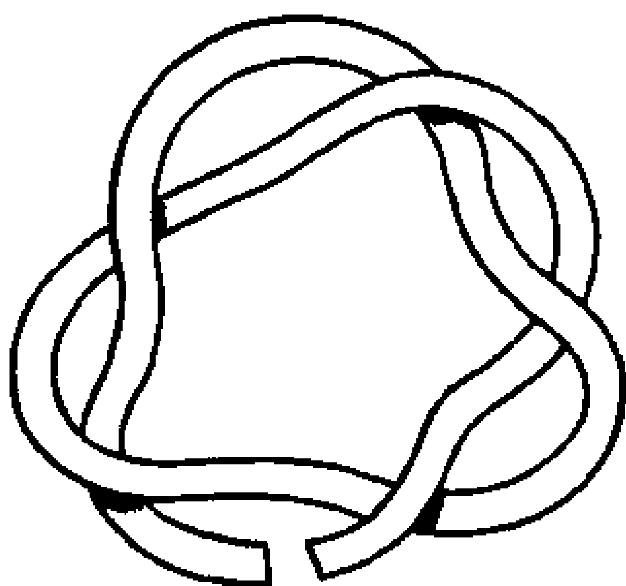


图 35

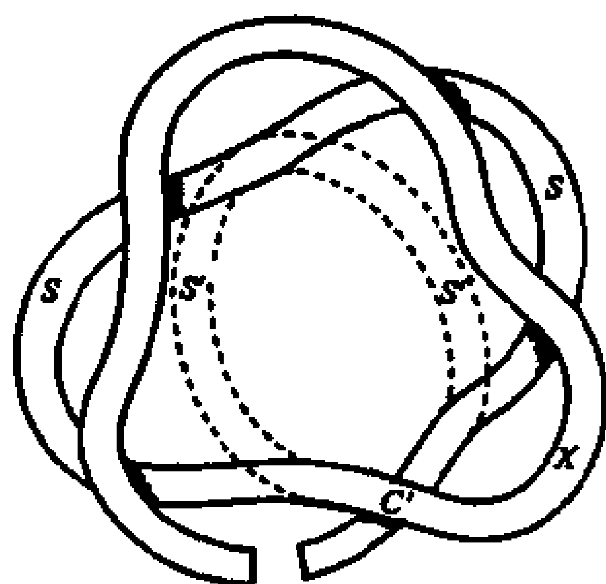


图36 标上 S 的波形带可以放到$S'S'$的位置，但是，如果 X

[99] 被拉进去了，它则替代了原来是 S 右边的位置.

在 C 处自己交叉.当它如图 31 到图 33 那样不自己交叉，我们发现它本质上是两个扭转.

所有由奇数个扭转生成的纽结具有如下形式：不管带子自身上下缠绕多少次，它只作成两个而且只有两个回路.因此，在

计算时，我们可以用图钉固定下一小段，而后从头至尾（即从图钉处出发再回来）追踪带子的绕曲，仔细计算出它翻转的次数而不管它上下波动的次数，然后再加 2，那就是它所具有的扭转数；在图 30 的情形它为 2，因为在切开之前它也已构成了两个回路.

让我们再看一看图 13 所展示的对象：它具一个面，一条边，没有明显的扭转.当将它沿轴线切开时，给出了有两个扭转的一条圈带：如果向一个侧面打开时它们是左旋的，如果向另一个侧面打开则是右旋的.现在我们明白了，它确实是个对称的麦比乌斯带，而最后所得到的两个扭转只不过来自边的连通性：我们再
也不能添加什么新东西了.我们终于有了些进展.图 37 再次展 [100]
示了上述曲面的切口，它似乎没有稍前所提到的那种两个回路的形状，但是我们可以把一个圈带翻过来使它具有图 38 的位置，给出了一个双重回路.因为相交被想象成理想状态的，从而我们可以按箭头所示把它拉出到一侧来，或按相反方向去拉，得到了右旋或左旋的扭转.

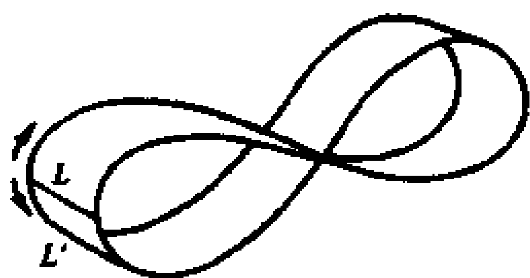


图 37

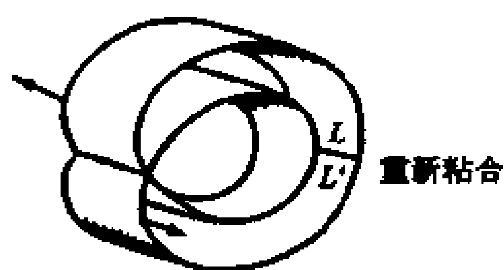
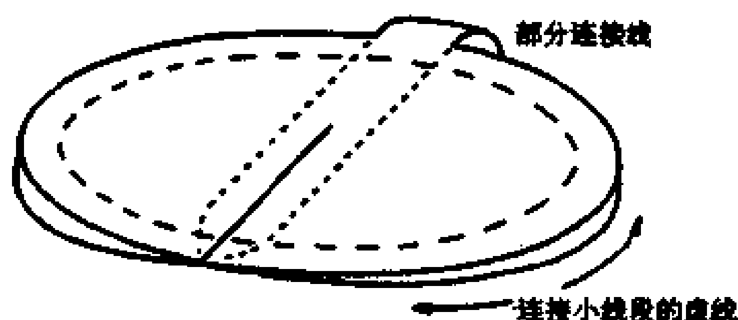


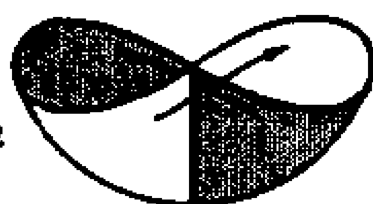
图 38

如果我们采用图 28 的“骨骼型”的模型，沿轴向切开它，在将截段 A 与 A' 粘合之后我们看出它是一个轴向切开的标准麦比乌斯带：有两个侧面，两条边和 4 个扭转.计算它们的比较简
便的方法是切去没有粘合的那些纸臂.这些扭转是右旋的，但如 [101]
果我们换成连结截段 B 及 B'，那么这些扭转就是左旋的了.

让我们重新审视一下加德纳的圆形模型图 23，对它作点小小的手术：我们发现它具有极强的适应性，甚至可以说是具有多种功能．沿图 39 的按点构成的虚线切割，我们得到了图 13 的对称麦比乌斯带的同胚图．沿由小线段构成的虚线切割给出同一样东西的不同形式；这个与前面那个沿轴向被切开后都给出具两个扭转的圈带．正如前面谈到图 23 时，把它穿过整个图形但恰恰在超过中心的那一边进行切割时给出了一个圆盘(或圆锥)及一个交叉帽：在这里，“超过”这个字眼很重要．

通过相交处末端 C 的切割给出了交叉帽，看起来像是图 40，这是在许多书中所指出的方法．可以看到，它具有两个面(阴影部分和没有阴影的部分，而箭头表示连结)，但这是不正确的．





[102] 图 39 连接小线段的虚线 图 40

人们应当能够由它切出一条麦比乌斯带来，但是我们做不到．如果我们把曲面向上延伸一点点，这两个曲面立刻就连结在一起了，如图41所示，甚至在我们像这里一样选用任意的形状也是

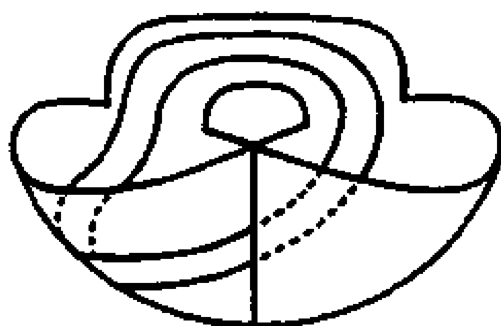


图 41

如此.这个添加的部分使我们能描绘出一条左旋的麦比乌斯带，即那条里面的曲线；容易看出该怎样才能得到一条右旋的带.这个交叉帽只有一个面，而且满足它是去掉一个点的射影平面这个定义；这时这个点扩大成了一个圆盘.如果我们把连接左边内侧的部分改变为右边的外侧，而将左边的外侧改变为右边的内侧，我们则可以由它切出一条对称的麦比乌斯带，见图 42. [103]

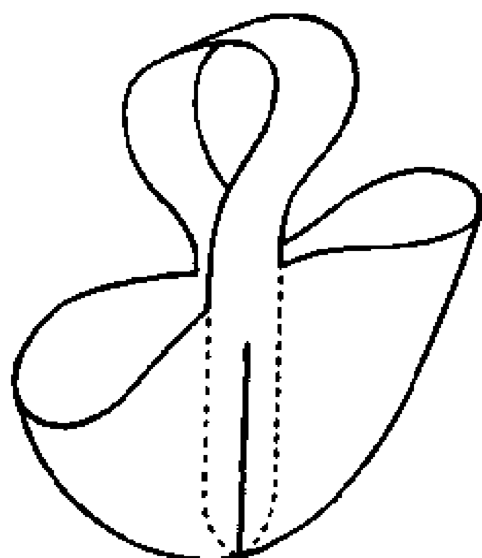
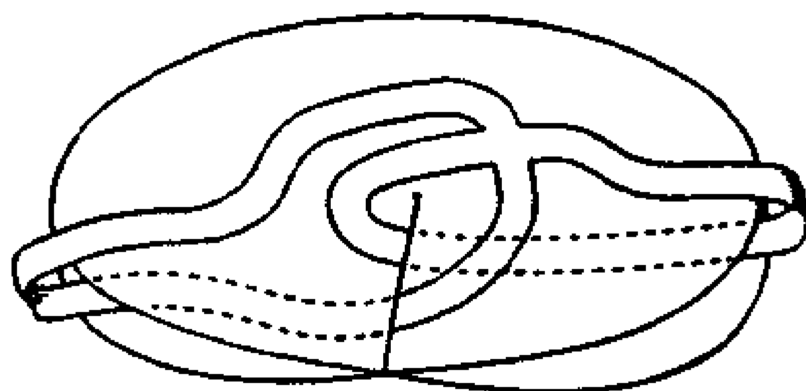
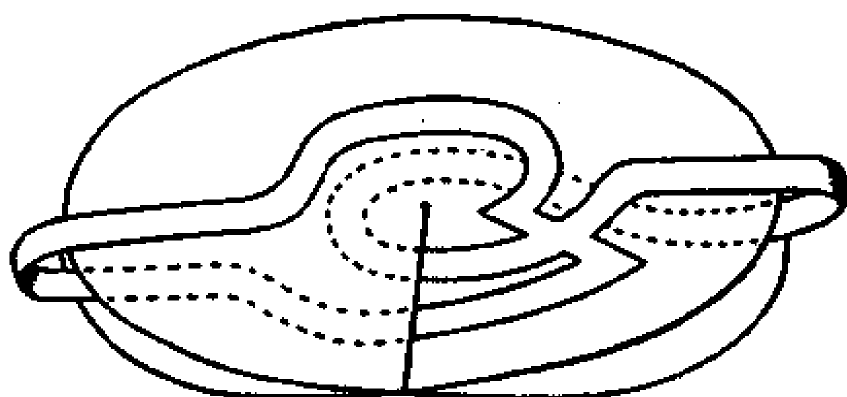


图 42

对称的或都是左旋纸臂的，或都是右旋纸臂的十字形模型均可由圆形加德纳模型切割而成.图 43 表示出上面提到的第一种和最后一种情形.我们只是按所要结果必须的那些边的上部和下部之间作了些连接，它表明这些可以由交叉帽得到.





【104】 图 43

不能过分强调加德纳模型不像理想的射影平面那样，它的不对称是由于有“一对边按左旋扭转粘合，而另一对按右旋扭转粘合”———旦完成之后，它却没有扭转，尽管在构造过程中也使用了扭转．它类似于对一个圆形路径，当你沿它顺时针通过时可以说成是“按顺时针运行”，以同样正当的理由也可以说成是“按反时针运行”只要你这样通过它就行了．

当在第 73—74 页，我们只把图 28 的截段 B 及 B' 粘合并轴向切割它时，得到了一个左旋扭转，其原因是在原来“未骨骼化”模型它是一个左旋扭转．这个事实更增强了上述的印象．事实上并不是这样的：我们可以对同一模型有不同的骨骼化，而同样两
【105】 边现在却有了，或说似乎有了一个右旋扭转，并当轴向切割时给出右旋扭转．

这里我们展示出两种方式来作骨骼化，对象是加德纳模型的正方形的及对角线的形式，所有的都以同样的方式构造（图 44）．

这一节证明了一个小小的，看似不重要的，微不足道的纸模型（一些人把一切模型都看成微不足道的）中的怪异种类是如何使人们对于拓扑学中的一个基本概念即对称性有所理解的．现在我们能够明白，数学家是如何把射影平面想成是既非右旋又非左旋的，如何想到一条没有扭转的麦比乌斯带．或许最近发现

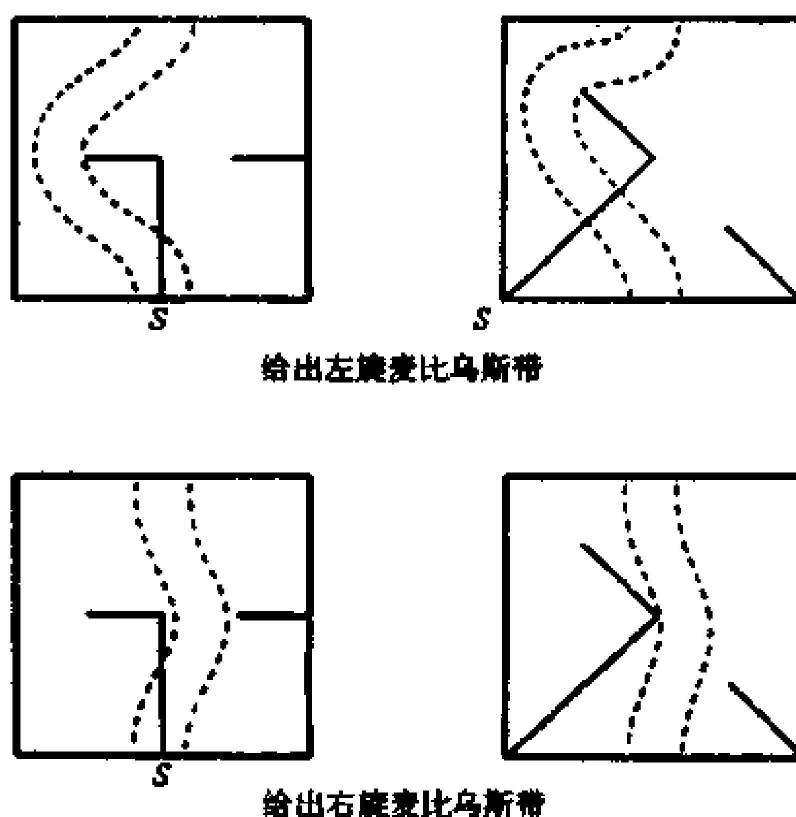


图 44 （必须缝合切缝 S） 【106】

的某些亚原子粒子的左旋性最终会被证实原来并不表示一种不对称体系，而不过是我们碰巧只察觉到了三维以上的爱因斯坦空间中某个对称东西的左旋部分罢了．但愿如此． 【107】

第7章　地图着色问题

在最初的能够比较清楚分辨出拓扑学范畴的时期中就已经提出和证明了其中的一些定理. 它们中有一些是著名的定理，譬如像约当曲线定理(第5页)，这是由于它们看起来极其显然但却难于证明的缘故.

这类定理中的另一个是铺砖定理. 它说，在一个(2维)曲面上作剖分(或者说把它分割成若干区域或面)时，假设没有一个区域在任何方向上都大于选定的度量，那么则不存在这样的剖分使得它们中没有两个以上的区域交于一个点. 例如，如果我们把整个曲面分成棋盘式的方格，则满足了假设条件，因为如果选定的度量为1厘米，我们只要使方格(对角地)小于1厘米就可

[108] 以了. 但是在每个顶角有4个方块碰在一起，从而后一个条件不能成立.(在砖墙的每个顶角上有三块砖相交.)

用不相接触的圆点覆盖整个曲面时，它满足了最后的一个条件，然而它的背景即那整块区域，将会大于所选定的度量，当然这要假定选取者有健全的理智. 另一种似乎可行的方法是作一串同心圆；它们永不会破坏关于相交的规定而找出一个属于两个以上区域的交点来. 然而它们最终会变得太大，如果不使它们过大则其相补的背景区域就会过大. 总之你成功不了. 这似乎在直观上很明显但是证明却并非如此. 事实上，这个定理可以继续推广到任意维数的情形，不过我们并不打算再深入进去了. 这里有另一个更加著名或是众所周知的定理，因为一百多年来它

仍未得到证明.

这就是被称作四色作图的问题,在没有得到证明之前还不能正式称之为定理①.它说,对任何一张地图,只要是画在一个单连通曲面上,例如我们所在的世界或者这一页纸上,我们只需要用四种颜色就足够了.

正如大家都知道的,任意多个区域或国家可以相交于一点,但是并非所有有接触的区域都需要对每个区域给予不同的颜 【109】色.(一个棋盘只需用两种颜色着色,尽管大多数的顶角处有四个方格相交.)这些区域一定具有至少是有限条的共同边界.另外,我们并不关心是用海蓝色还是桃红色,只要相邻的区域给出不同的颜色就行了.没有人曾找到过一张地图需要四种以上颜色来着色也没有人能证明不能制成这样一张地图,而且一大批博学的智者都试过了.已经证明过下面的事实:不能把 5 个区域安排成其中任一个都与其余的 4 个相接触.如果要绝对严格的话,它的证明比看起来还要富于技巧性得多.尽管如此,这与定理的证明不是同一回事.

我们可以开始画一张地图,并且边画边着色,最后不能再继续进行下去时就返回原路重新安排前面的颜色.这样做总是成功的,但是至今无人能证明这样一定是能够做成的.

最令人烦恼的是一个似乎更加艰难的定理已经得到了证明:在一个环面上或者在任一个双连通曲面上,需要用 7 种颜色而且 7 种也就足够了.如果读者喜欢出难题难倒别人,可将图 1 画在一个纸环面上(对制图业而言,炸面圈形的东西毫无用处), 【110】然后在一番适当的夸夸其谈之后拿给别人去着色.可以看出,这里有 7 个区域,其中每一个与另外的每一个都有接触.(记住所表示出的粘合.)

---

① 译注:事实上,在 1976 年此定理已由哈肯和阿培尔证明;他们的证明使用了计算机,因而对此证明仍有所争议.

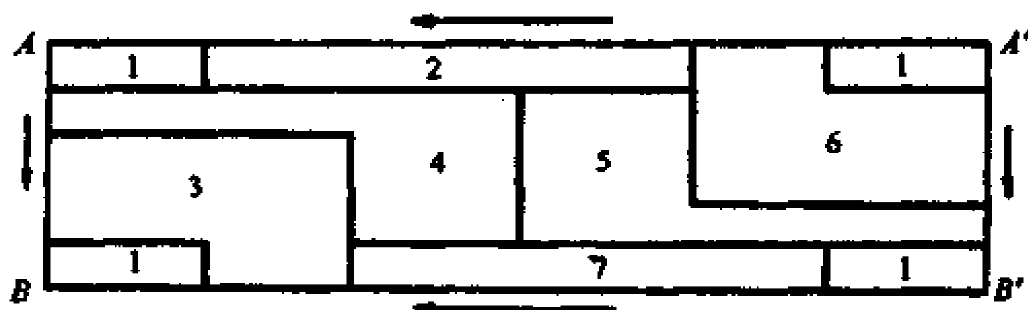


图 1

如果与反面的区域在一条叠缝上相遇，应该解释为它们必须具有不同的颜色. 即便是一条麦比乌斯带，也已被证明它所需的少于 6 种颜色，而且有时的确需要这么多种. 如果一条带像图 2 那样剖分，而后扭转并连接；我们看到，这里有 6 个区域，每个与另外的每一个均接触. 此带只有一个面，我们把它看作是透明的：颜色可以从两个方向展示出来(见第 17—19 页关于可定向性的叙述).



[111] 图 2

人们已经从各种角度出发来着手解决四色问题，其中看起来最有希望的是用多边形的欧拉公式，因为一张地图可以拓扑地变成一个多边形，而此公式正如我们在前面看到的可以应用于任何一个由面(区域)，边(边界)和顶点(边界的交点)构成的图形. 尽管进行了彻底的分析，基本问题仍未得到解决，但是作为副产品却出现了一些有趣的定理. 在某种意义上说，我们可以把它称之为三色问题，因为如果我们能够作这样一张地图，使得它的外部区域需要 3 种以上的颜色，那么我们能够用单一的一个区域把它围起来，而此区域需要用第五种颜色.

这并不意味着，除去包围它的那个区域外此图只需用 3 种颜色就成了，而是说在所有情形下，我们必定能够重新安排颜色使得外部区域只需 3 种颜色就可以了．在图 3 中，我们开始把内部涂以 1，2，3 色，然后对外围的涂上 1，2，3，但是 x 需用第 4 种色而 y 则需第 5 种．要避免这种情形，我们必须从 x“撤出”第 4 种色而转移到内部的一个区域中去，这里我们可用 3 替代 x．如果当
我们向外推移时，在每个后续的步骤中都能够找到一个准确无误的 【112】
方法来撤出第 4 种颜色，我们就可以解决问题的这个方面．

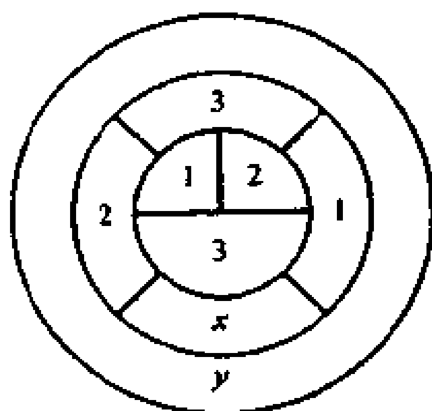


图 3

任何一张地图都可用变成一张所谓的正规图而使它更加统一；这个正规图是指没有 3 个以上的区域交于一点的那种地图．这样做不会影响到着色，因为我们所做的不过是把某些不接触的区域使它们接触；那么如果我们把它们涂以不同的颜色这并没有什么害处．通常的办法是像图4那样加上一个新的区域A以代替原来多于3个区域的交点中．现在我们有了4个点a，b，

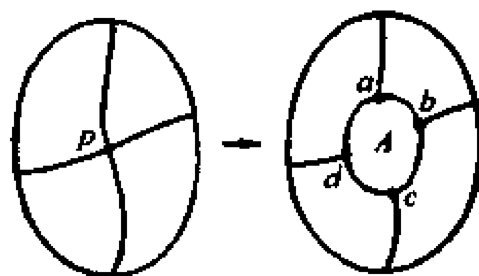
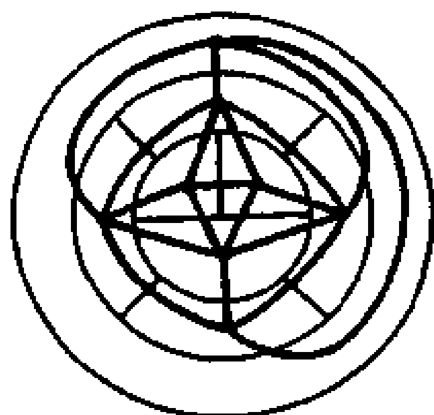


图 4 【113】

c,d，每个仅是 3 个区域的交点．如果第二张图已正确地着色，那么在去掉 A 后的结果依旧是正确地着色，尽管或许两种颜色就够用时却用了三种．我们不去讲这种统一规格的简明性了，有时它在数学中是有用的．

如果我们先把这张图转换为它的对偶图就可以得到更加强的统一性．这是一个连通的网络图或称网格，其中每一个点代表一个面积，而连结点之间曲线的连通性表示区域间的接触．图 3 的对偶由图 5 给出，那里每块面积中取一个点，而两个面积间的接触由一条连接它们的曲线表示．然后，去掉原来的图，所剩下的图 6 就是它的对偶．由于此图恰好是正规的，它的网格是三角形的．如果它不是正规的，我们可以在不像图 4 那样加上新面积的情形下，用三角剖分的办法把它做成正规．图 7 中的地图给出了图 8



[114] 图 5

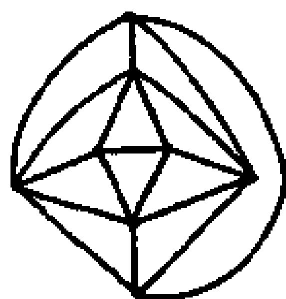


图 6　对偶(缩短了线的图)

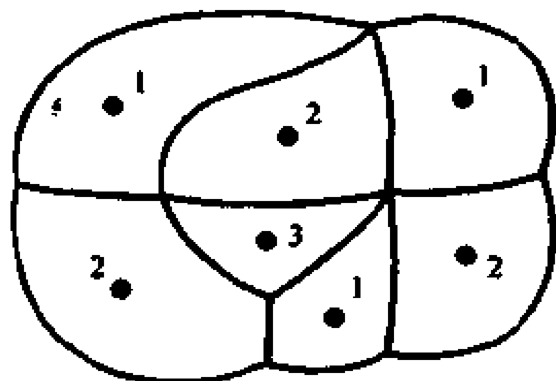
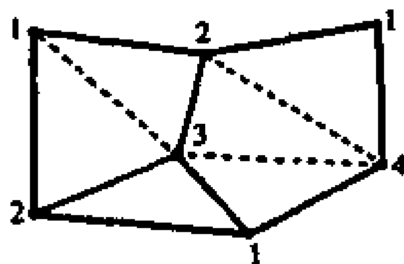


图 7



三角剖分使我们必须在网格中用 4 种颜色

图 8

中的网格,其中正方形及五边形由添加上虚线而使其变为三角剖分的,而这样做由第 81 页的理由知,它并不有损于问题的解.

在这里着色意味着对点标号以使没有两个直接相连的点有相同的号码.我们发觉它离答案并没有更靠近一些,但至少知道了可以专门去处理三角剖分.我们还可以进一步简化.显而易见,一张地图中的岛屿或飞地可以被忽略,因为它们只与包围它的区域相接触,从而可以涂以或标以与此区域不同的颜色或号码.同样,被两个或三个互相接触的面积围起来的一块面积(见 【115】
图 9 和 10)也可以忽略,因为外围的可以用两到三种颜色而中间的那个则可用第三种或第四种颜色.这也可以用到完全被不超过三个相互接触面积所包围的一组面积的情形(图 11).这组



图 9

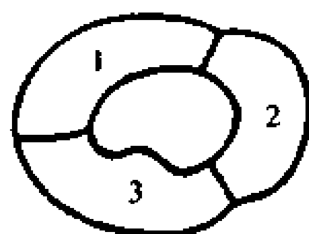


图 10

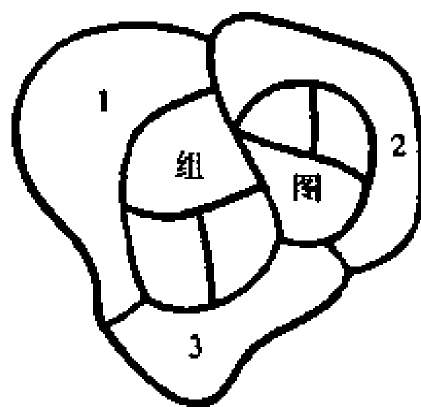
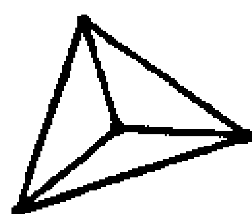
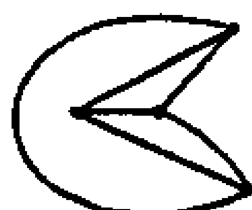


图 11

面积构成了一张分离的地图,即它自身的问题不会影响到外部包围它的那些面积:不管怎样,后者只需要三种不同的颜色,而且,如果我们能对任何图证明定理成立,那么对这个孤立的一组也成立.这就意味着任何一个网格都不会有一个三角形它含有其他的点或线,除非这个三角形是个外三角形(如果有的话).另外,我们永不会有少于 4 条的线交于一点的情形出现(图 12 和 【116】
13),因为这只能发生在一个三角形(可能是弯曲的)中,但图 10 是不允许发生的.每个三角形 T 会有三个其他三个三角形附在

它的边上，它们有独立的顶点 a，b 及 c（见图 14），因为如果其中有两个三角形具公共顶点，其结果就是图 15，这成了图 10 的网格．最后，所有多余的连接线都被去掉，因为我们总是把相连结的点涂上不同的颜色．


图 12


图 13

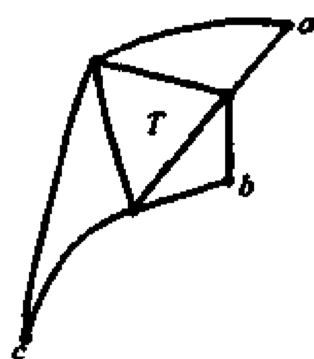


图 14

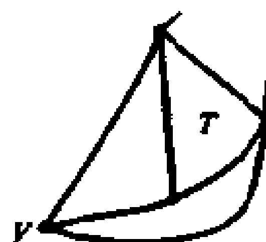


图 15

如果地图是球面上的，我们像在第 8—9 页上对多面体做的那样把它打开摊平，使在背后的面积变成新地图的外部面积．在
[117] 它的网格或对偶图中，它变成一个外点 P，它与前面的外部点以线相连并给出外多边形的一个三角形（见图 16）．

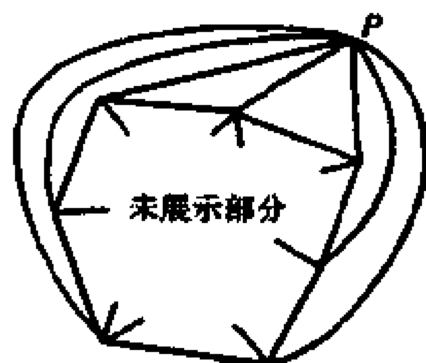


图 16

现在，读者可以独立进行下去了：因为基础部分已在前面仔细而彻底地察看过了，除了消遣娱乐之外没有提供更多的诱惑力．但是，或许一个新鲜的，更加直观的眼光会看到专家们所遗漏了的东西．

作为体验地图着色时所遇到困难的一种方法，下面的二人游戏会有所帮助，甚至很有趣：参与者 *A* 画一个区域，参与者 *B* 着色（标号）并画一个新的区域．*A* 着色并再加上第三个区域．一直进行到某个人受阻而不得不选择第五种颜色为止．困境是由粗心大意造成的，但有时可以预测到并加以避免．

智测题：要求对地图 17 着色．每个区域的面积除去顶上一个外均是 8 平方英尺，顶上一个为 16．你有如下的颜料：正好够涂 24 平方英尺的红色，够涂 24 平方英尺的黄色，够涂 16 平方 【118】
英尺的绿色，以及够 8 平方英尺的蓝色．规则仍是通常的：相接触的区域具不同颜色．密切留意一些怪招．（答案在附录中．）

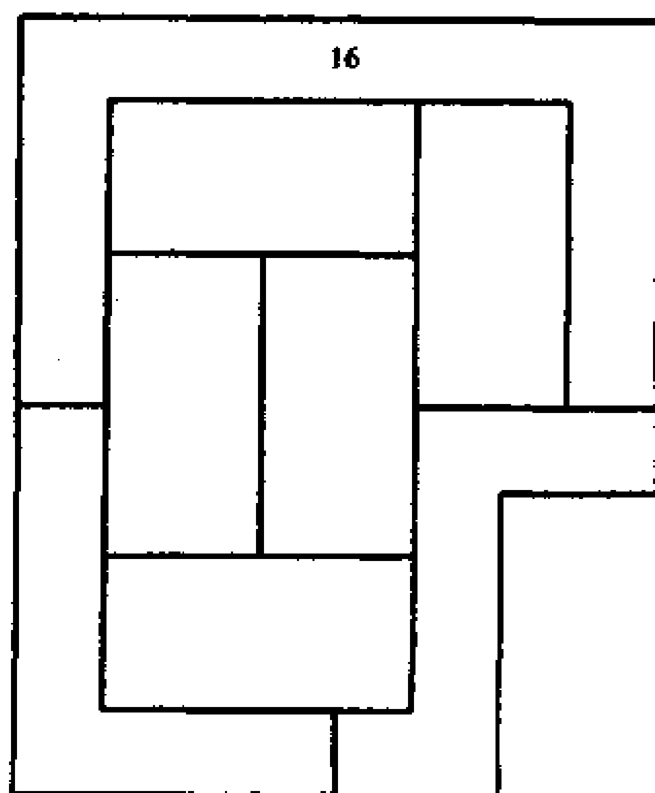
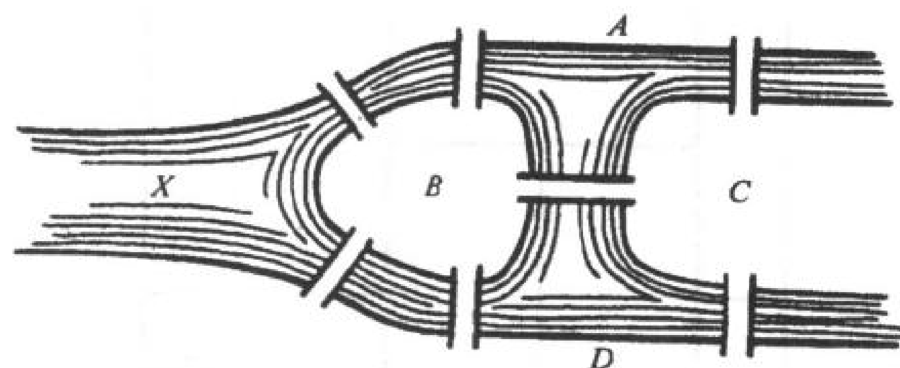


图 17 【119】

第 8 章 网 络

哥尼斯堡桥

在上一章中我们把一张地图换作一个网络时就能够看出事物的本质.碰巧,这也是拓扑学的一个起点.哥尼斯堡过去属于东普鲁士后属于苏联.在流经它的普瑞格河上过去一直有七座桥,用以连接两个岛间及岛与岸之间,如图 1 所示.在 18 世纪初期,他们提了一个难题,即问一个人是否能以通过所有的桥来走完一圈,而且通过每座桥只有一次.



【120】 图 1

原来也像四色问题一样,没有人能够做到它,也没有人能证明它不可能做到.读者可以试一试这个图,看看会发生什么.欧拉(见第 6 页)在 1736 年证明了这是不可能的:他把图约化成一个网络(图 2),其中陆地面积由点表示,而桥由曲线表示.他把所有这类网络作为多面体研究的一部分而得到了一般的规律.

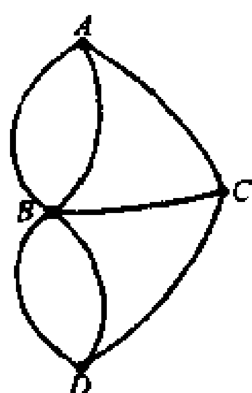


图 2

可以看出它不同于地图的相应网络，它在A与B之间和B与D之间允许多个连结，这正是那些桥所在的地方.

上述规律如下：每个顶点都汇集了一定数量的线(在这里表示了桥).如果这个数是奇数，就称此顶点为奇顶点，如果为偶数就称为偶顶点.现在可以证明，只有偶数个奇顶点或者没有奇顶点.(我们建议读者利用第6—13页的对另一个欧拉规律的证明为指导去试一试 【121】 证明这个穿越规律).只有当没有奇顶点或两个奇顶点时才可以做出一条回路使每条线只被通过一次.哥尼斯堡有四个奇顶点，故而不可能存在这样的回路.现在不要再到那儿去走一走，因为他们已经在x这里架了一座桥了(见图1)，从而把南北岸都变成了偶顶点.我们发现，要做这样一条回路便不得不从一个奇顶点出发.

可以根据这个规律设置一个完全不公平的赌博：要求某人随便画一个网络图，而后和他赌是否可以那样通过它.当然，你要先偷偷地数一数奇顶点的个数再依此下赌.我们中大多数人从我们还是孩子时都知道一些这一类的简单图形：图3不能一笔画成而图4只要你从A或B出发就可以一笔画成.

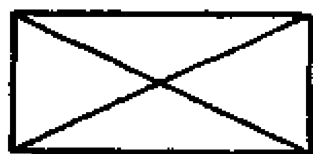


图 3

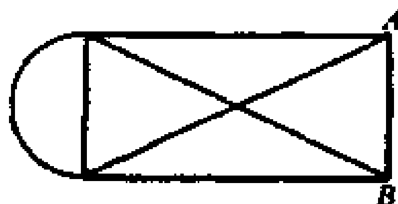
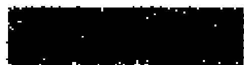


图 4

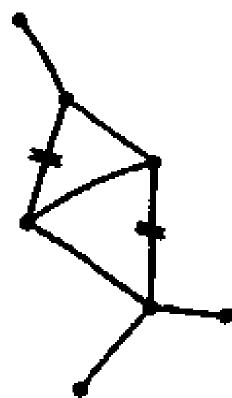


一般的规律说，可以用来作一个完全穿越的路线的互不连
【122】通图形的个数是奇顶点数（总是偶数）的一半．

贝 蒂 数

我们能够构造一个没有闭合线或圈的网络：一个整片的网络，其中每条线都终止于另外一个自由顶点．称这个网为树，相当容易看出，较之于线段或在第 1 章中称为边的个数，它的顶点的个数要多一个．首先，如果对任意图形运用欧拉公式，由于一个树只有一个面即其背景面，从而由公式 $F-E+V=2$ 得到 $1-E+V=2$ 或者 $V=E+1$．

可以去掉一些线或边把一个网络变成一个树，即留下的那个连通图形（图 5）．譬如我们移去了 B 条边（这里的 $B=2$）以消除了所有闭合线：我们原来有 E 条边，V 个顶点，那么因为刚刚看到的公式 $V=E+1$，故而有 $V=1+E-B$，或说 $B=1+E-V$，图 5 的情形为 $1+8-7$，或 2．称 B 为一个网络的贝蒂数，它总是等于面的个数减 1．（它以 19 世纪的意大利数学物理学家恩里柯·贝蒂（Enrico Betti）的名字命名．）



【123】图 5

对于多面体而言，显然同样的事情也成立，像在图 6 的四面体中有 6 条边，4 个顶点及 4 个面．可以拿去3条边而不去掉任何顶点：故而 $B=3$，或较 $4F$ 少 1．仅仅是 $F-1$ 这个数似乎有

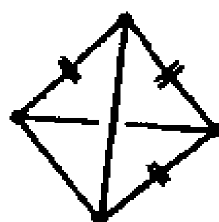


图 6

点平凡，但对于连通性的概念而言它却是基本的，而且它也可用于曲面，尽管形式有所不同．对一个圆盘或者任何一个拓扑等同于一个无空洞的矩形，我们不可能把它横切之后而不把它分成两片．（横切表示从一边开始切割而最后又切到一条边．）这表示一个（拓扑）圆盘具有贝蒂数 0．另一方面，一个圆环或者一条麦比乌斯带的贝蒂数为 1：在图 7 和图 8 中的每一个都按虚线切开却没有拆成几片．一个具两个洞的圆盘会有贝蒂数2．球面又
怎么样呢？由于它没有边缘，我们不能作横切，而如果我们在它 【124】
上戳个洞来得到边的话，我们就得到了一个拓扑圆盘：把这个洞抻开并整个压平．

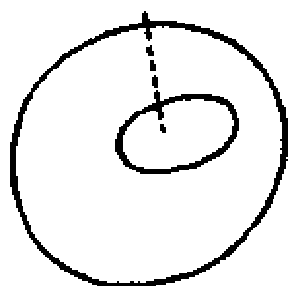


图 7

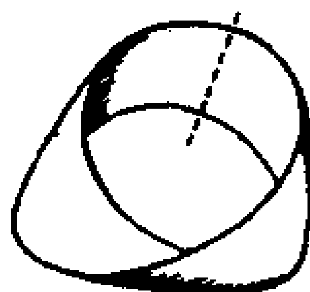


图 8

但是环面和克莱因瓶又是另一种情况：一个洞并不能把环面做成可以形变为圆盘或圆柱的曲面，对克莱因瓶也是如此．当然所谓洞我们表示的仅仅是刺个小孔而不是像剪火车票那样打一个小圆洞出来．（带小孔环面的形变将在下一章探讨）．

十分显然的事实是，我们有两种横切能使一个带孔环面不

被分割开：一个是绕着管状部分或是圆柱形部分的 x 横切，另一个是绕着中心或是圆环形的部分的 y 横切（图9）. 当 x 和 y
[125] 被切开后，环面仍为一片而且从第 51 页往后的内容可以看出，这个事实对克莱因瓶同样成立. 这两个曲面都具有贝蒂数 2.

为了在不打洞的情形下求出贝蒂数，我们作一个圈形切口，它就像它的名字听起来的那样：从曲面上任一点出发，而后在没有自身交叉的情况下又返回原处，即一条约当曲线. 公式在这里略有改变：一个圈形切口把圆盘分成两块，然而也把圆环或圆柱也分成两块. 故而我们算出边数并说 B 等于那些圈形切口数，这些圈形切口是我们在曲面上所作的使得曲面不能分成多于边数的块数. 那么，一个圆盘有一条边缘，这时没有一个圈形切口能把它分成不多于一片，因此 $B=0$. 圆环有两条边缘，有一个圈形切口能把它分成不多于两块，故 $B=1$.

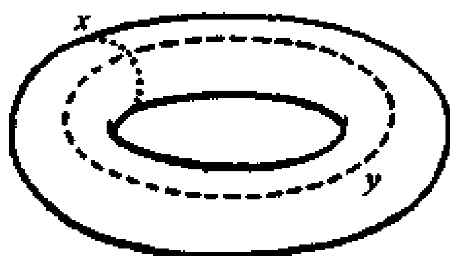
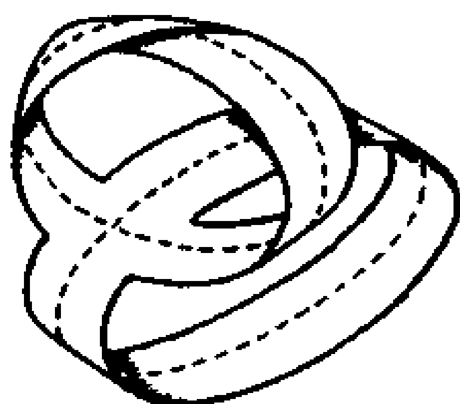


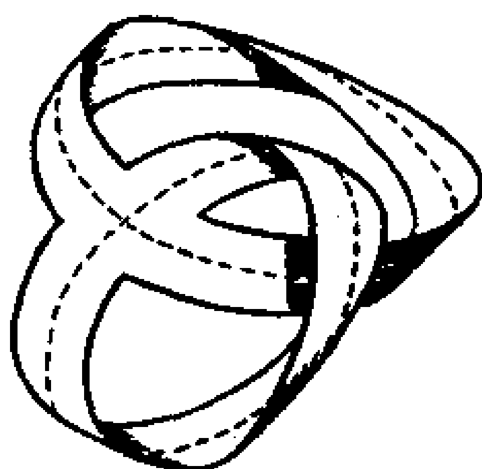
图 9

但是麦比乌斯带只有一条边以及有一条沿长的方向的圈形切口却并没有分开它，从而也有 $B=1$. 在一个不带孔的环面上我们可以作两个圈形切口即平行于前面所作的那两个，故 $B=2$. 对克莱因瓶有同样结果，但对射影平面却碰巧并非如此. 非常难于把射影平面形象化，但是可以证明，如果沿两个轴切开一个加德
[126] 纳模型的第 77 页图 1 上的形式，它则被分成两块：一个圆锥和一个交叉帽. 用第 35 页图 3 的那个公认的不完全模型就要容易得多了，但先从图 2 的那个克莱因瓶着手，当我们沿着虚线（在图 10 中都画出来了）切开时最不可思议的事发生了：它成了一

块平坦的空心正方形.另一方面,射影平面则裂成了碎片.重要的不在于最后的形状而在于它们的数目:克莱因瓶一片,射影平面两片.因此射影平面的贝蒂数与麦比乌斯带一样为1.似乎很不公平.



克莱因瓶



射影平面

图10 两个图都由大张十字形纸做成

所有这些并不意味着可以在一个 $B2$ 曲面上任作一条圈形 [127]
切口而不破坏它的完整性:它可能是面上去掉了一个圆片的一小块东西.某些横切切口会分割开麦比乌斯带:比如字母 C 形的,两次切在外部边缘上;然而,关键是存在不能分割它的切口.另一个事实是,如果我们把允许的即不分割的圈形切口和横切切口都标上记号(这里的横切切口对圈形切口而言它刺破了曲面),我们发现,每个圈形切口都相交一个横切标记.这个被称作"对偶性"的东西被普林斯顿大学的莱夫谢茨证明在任意维数的情况都成立(1927年),而且是很强的一类不变量.现在我们可以说:(1)边缘的条数,(2)面的个数,以及(3)贝蒂数是二维曲面的不变量.一只猫的贝蒂数是9.

稍后我们将讨论级数,而当我们谈及切口这个题目时,似乎是个提出下面问题的好时机.如果把一片纸切成两片,然后把它

们放在一起再切开，等等，显然我们开始得到 2，然后 4，然后 8，……，每次都加倍. 附带说一句非拓扑的话题：如果对一张纸牌按上面方式仅仅作 52 次，最后得到的这一堆东西可以到达比
【128】太阳还远的地方. 数字 2,4,8,16 等等，它们构成了几何级数.

迄今一切顺利，但是如果我们先折叠，而后比如 6 次折叠后再切割，那么会发生什么情况呢？有两种方法来做这个折叠：每次对前次折叠作直角折叠，或者作平行折叠. 而切割也可以对最后一次折叠成直角的或平行的两种. 对于平行折叠而垂直切割的情形其答案没有多大意思：总是两块；但是对于平行的切割事情却复杂了. 第一次折叠时我们得到图 11，它图示出横截面. 图12表示出第二次折叠而图13表示第三次，等等. 如果我们数出每次的片数，我们得到一个级数，其首项为 1，即无切割（图上未表示），而后为 3,5,9,…. 持探索态度的人会留意到它与单独切割时得到级数有些奇怪的相似之处，只是它的每项是后者的每项加 1：0 + 1,2 + 1,4 + 1,8 + 1,….

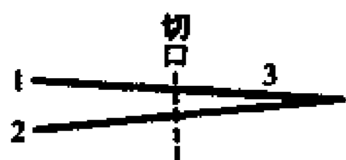


图 11

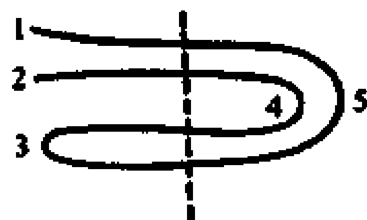
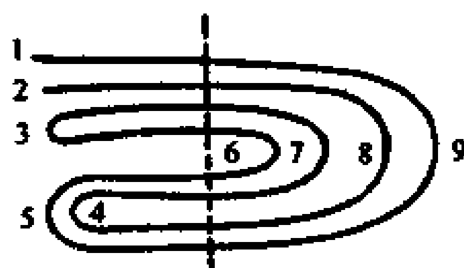


图 12



【129】图 13

在这个时候，纸和剪刀似乎比图解更简明．毫无疑问，下一个数是 17．如果审视一下图 11 到图 13 我们会明白所发生的事就同于把每次加倍，但不包括那两个零散的或说是没有连在一起的边缘；如果这些被粘合的话，我们就会在那个位置得到一片而不是两片．这就是那个在每项加上的 1．对于直角折叠和那两种最后的切割，这个级数以一半的速度前进：2，3，3，5，5，9，9，…，这是直角切割的情形，而平行切割时，它直接从 3，3 开始．叠纸进行的实验可以表示出为什么会这样，然而实验不能进行得很远，因为它很快就会变得太厚而无法切开了．再附带说一句，用一张纸，任何一张，折叠十次：先对折，而后以横截方式再叠等等；用这个问题向任何人挑战都是一个安全的打赌，因为这是完全不可能的……，他们不是卖足够大的纸或足够薄纸张的人．现在我们到了事情的关键之处：

每次我们折叠并切割，直到最后的切割前都不把它切到底．每次部分的切割能使我们得到多少块？它的级数是什么？由于逐渐增加的厚度，我们不能实际上以纸张做实验进行到 6 次折叠或 7 次以上，但是注意一下图 14 所提示的会发生的事情： [130]

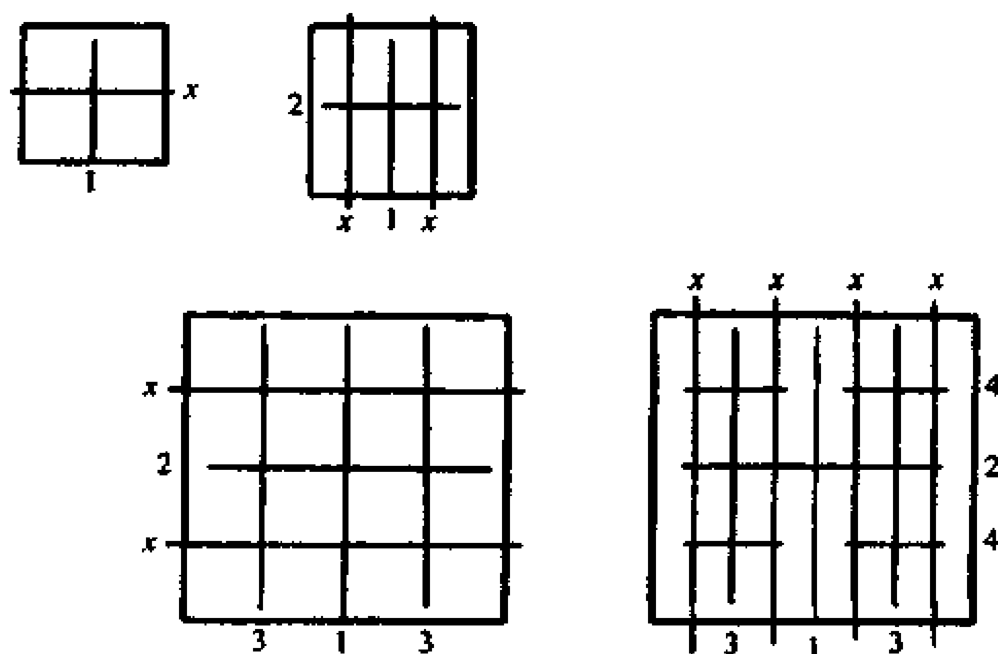


图 14

x 是最后的切割，其他的则编了号，它们所有的都交错地加了倍．我们将每次都局限于直角式的对叠方式，否则事情会变得滑稽可笑，即便是直角方式也已足够坏了．有四个可切入的方向：北、南、东、西；东和西的方向实际上是一样的．可以发现，方向并没有什么差别．（当在切割时不要太靠近边缘．）

当然，折叠只涉及到这个小小的没有被切割的部分．没有下面的提示，这个问题就显得提得不公正：有时人们会发现有两个或更多的级数重叠，或交错，其中一个可用于奇次的运作而另一
【131】个用于偶数次的运作．答案在附录中．

纽　结

拓扑学家虽然接纳了纽结这个课题，但是除了说纽结在大于 3 维的空间中不存在以外并没有证明多少东西．这使人联想起另一件事，即一条约当曲线只分隔开曲面却不能分隔 3 维空间．字母 O 把这页纸分成两部分：内部和外部；但是挂在房间中间的一个绳圈不能分开任何东西．或许在讨论纽结中更为贴切的说法是，如果两个圈在 3 维空间中链结在一起，它们则会在 4 维空间中分离开．

然而，数学中有一个常常值得研究的重复的声音说，在数学中没有完全一样的东西，而只有一些令人遗憾的近似，像是 π 和 3 那样．（这个近似误导了许多人：圣经直截了当说 π 就是 3，至今仍有一些怪人相信它．怪人是一种失败的有怪癖的人．）图 15 中
【132】的两个圆环链接在一起而不能分离，但对旁边的三个(图 16)又如

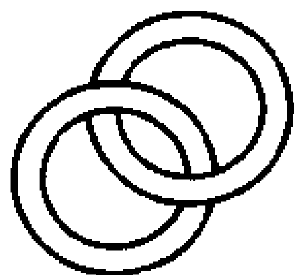


图 15

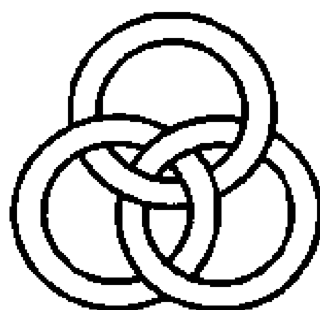


图 16

何呢？它们中没有一个与另外的相链接但它们仍然不能分开.

一些拓扑学家断言,所有的纽结在本质上都是一样的,仅是些圈或圆,但是这很难使--个水手或一个童子军相信,仅仅连接打了结的绳索的那些自由端就可以影响纽结,或者一个容易解开的老奶奶结本质上就是用于张帆的单套结.一个纽结的最有效的东西是它的把持能力,但是这要引进关于摩擦力的讨论,它超越了我们的主题.纽结作为曲面的一种附产品出现,如像一条麦比乌斯带的边缘就3维空间而言是一条扭曲的圈,它可以拓扑地形变为一个圆(见第57—58页).但是,如果不是给纸带一个而是三个的半扭转再连接,它就会是图17中的一个三叶形纽结的形状.当切开它,两端断开时,它就是所有纽结中最简单的一种.有一个古老的魔术便基于这个事实:玩的人准备了4条大纸带,一条没有扭转,一条有个半扭转,一条有两个半扭转,另一 [133] 条有三个.当这些纸带沿中心切开时,第一个给出两条没有链接的带;第二个给出一条长带;第三个是两条链接的带而最后一个是一条有一个纽结在其中的带,它是三叶形.三叶形可以是右旋的也可以是左旋的,但是,虽说它们之间的差别是明显的却不可能在没有参照某个现存标准①下确定出那个是那个.

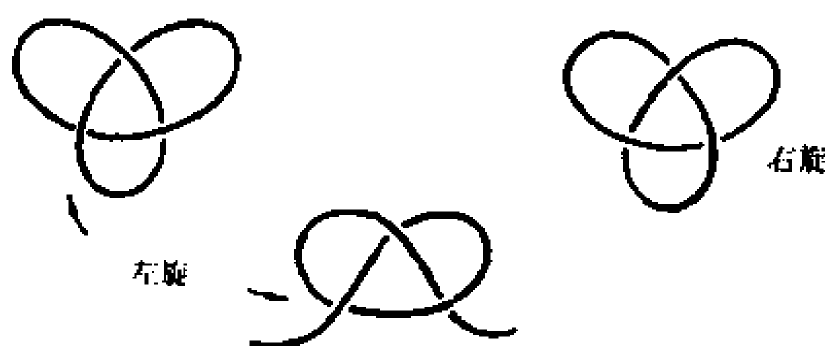


图 17

① 可以相信这样的标准会普遍存在,如在原子中,但它在拓扑上却不能被定义.



看看字典是怎样定义"左"和"右"是有启发的.《美国大学字
典》说,左是面北朝西,而右是朝东等等.《芬克和华格纳尔字典》
说得更具诗意:左是"面向日出而朝北".人们或许期待说右应是
改为日落,但是天哪,不是如此,而是面北朝南.《韦氏新大学字
【134】典》却信奉人类中心学说:人的左边是肌肉能力较弱的那边,右
边则是更灵巧的那边.《不列颠大百科》是狡黠的,他们信奉这是
由于政治的差别.它有些像要试图决定那个是宽度而那个是厚
度一样,但它取决于你把脑袋朝那儿放.这是件相对的事情. 一
个漫长,无用,纯属娱乐性的讨论可以用向某人提问的方式得到
改进,而且最好是教条式的提问:为什么镜子把你左右翻转而不
是上下翻转? 如果他在这面镜子上方,则他可以说它不是前两
种情形,它把你前后翻转(确实如此).然后问问他,为什么这个
使得一个拿一支笔在他右手的人成为笔在左手的人,但是却仍
【135】旧直立着.他或许真要发怒了.

第9章　有关带孔环面的审讯

仲裁人：听证即将进入程序．琼斯先生，请陈述您的理由．如果您需要画图，这里有块黑板．

琼斯：我的值得尊敬的对手赛塔斯博士，宣称他已将一只内胎从里到外翻了过来——

赛塔斯（打断对方）：是在面上割开一个小洞之后．

琼斯：不错．他把这个吹嘘为令人吃惊的事，如果他的宣布是真的，我也会感到吃惊的．我的论点是，它只是半个里外翻转（图 1）；请瞧瞧吧．

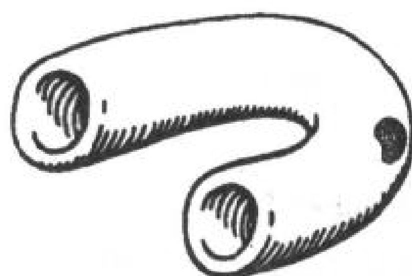


图 1　证物 A　【136】

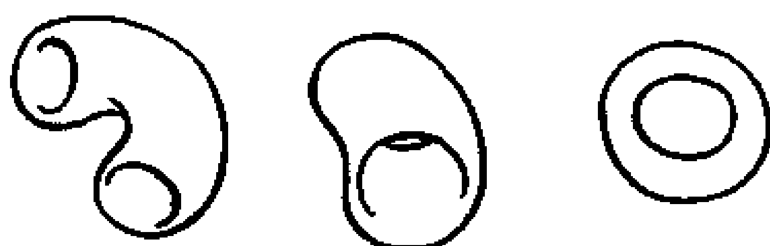
仲裁人：赛塔斯博士，您愿陈述你的理由吗？

赛塔斯：我的对手显然被这个像从茶杯上取下的空心把手的现在外观这个不相干的事实所误导．当他看见一个环面时显然他并没有认出它．这是个扭变弯曲了的，但是尽管刺了孔，它在拓扑上与翻转前一样，仍然是个环面．

仲裁人：翻转？



赛塔斯:里外翻个,但是另一个词听起来更数学一点.我的观点是,如果审视证物的话,我们看到它只是一个有穿过中心的长长的窄窄的弯曲的洞的环面:在炸面圈中这个洞会被叫成什么?它有一个压平了的和拉长了的内部空间,其中在正常情况下是些压缩空气.我可以在黑板上展示出它现在的形状是如何在不撕破不粘合的情况下形变为一个更容易识别的环面.(走向黑板画出了图 2)正如您看到的,我们所做的只是把它缩短了一点.



[137] 图 2

琼斯:而且非常顺手地把这个内部没有翻转的部分缩成了一个薄薄的圆环!

赛塔斯(对此置之不理):我还应指出,我开始用的内胎是灰色的:现在它是黑的!这是因为它的内部表面是黑的而现在整个外部都是黑的了.

仲裁人:对此我们能有个证明吗?

赛塔斯(不高兴地):哦……好吧,如果你坚持的话.(耸耸肩;他用力与图 1 争斗了一阵,酷似拉奥孔的塑像,①最终车胎回复到它原来的样子[图 3]——全是灰色的.)请看!我将以一连串图形来解释这个.(走到黑板前.)在图 4 和图 5 中我们开始抻开这个洞直至它只剩下一条窄窄的连接条,图6.

① 译注:拉奥孔是希腊神话中特洛依的祭师,因触怒天神被海蛇缠死.

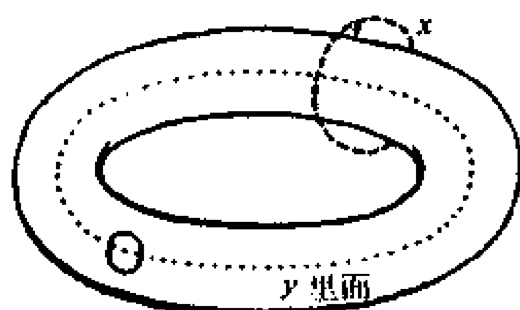


图 3

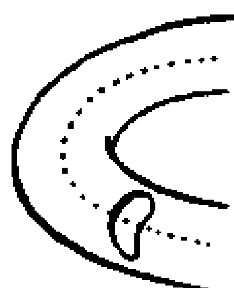
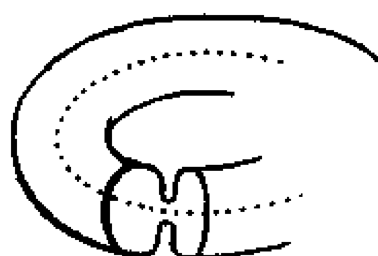


图 4



（先不看虚线，它们用于后面）

图 5

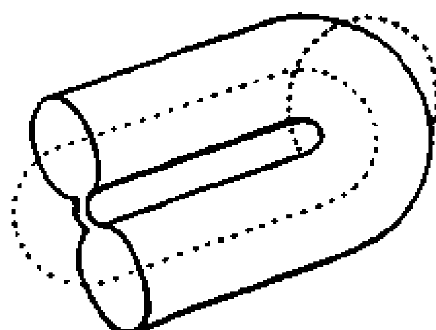


图 6 【138】

再后是图 7，我们开始把环面的一部分在自身上卷回来，就像长统袜的上端，并把新出现的内部表面标上字母 P，外部表面标上 Q. 我们然后如图 8 和图 9 那样继续做下去，直至 P 卷回到 Q 旁边，并把这个洞又变成原来的宽度. 图10展示的是端视图，我

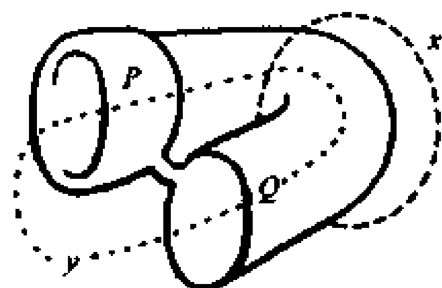


图 7

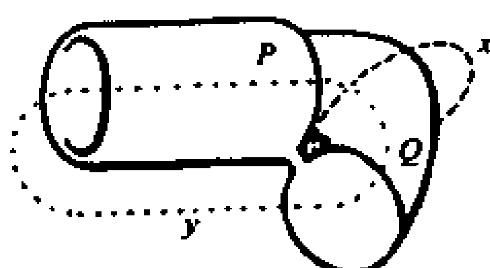


图 8

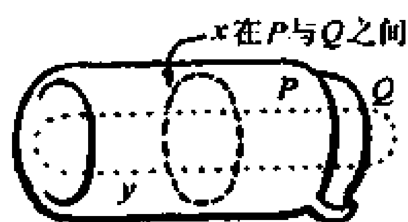


图 9



图 10 端视图 【139】

们看到的这个洞是个双层弯曲的约当曲线，它现在又收缩起来了，图 11 及图 12. 在图 13 中我们把整个环面缩短回到它炸面包圈的样子. 引人注目地，原来在内部表面的 P 现在到了外面，而同时相反的事对 Q 也发生了. 环面里外翻转.

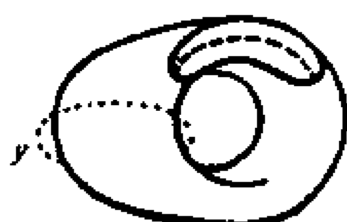


图 11



图 12

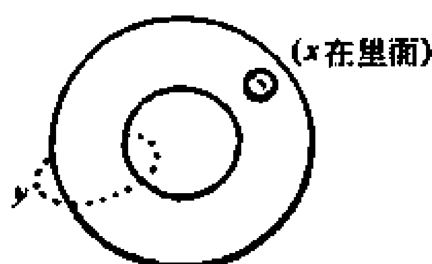


图 13

琼斯：我承认一直到图 9 的推理路线，但是您应该在此就停
【140】下来，因为那是您用真的内胎所能进行到的地步. 让我重新画出图 9 以便和现实相符合，不然便是您对它的想像. 它看起来像这样(图 14)，而且里面的半个正好是在开始时的那个样子：您只不过是把它叫作翻转的. 所有那些在它上面原来是相互面对面的点仍然是面对面的，而那些面背的……

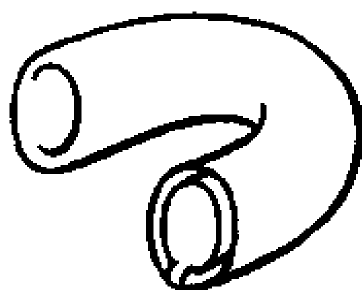


图 14

赛塔斯(打断对方):是的,但是您提到的第一个那些点是面向内部空间;现在它们面向外部.

琼斯(走向黑板):我想我能够澄清这点.这儿是一只手套(图 15);比如说它里面是黑色而外面是灰色的.现在我们来进行从里到外的翻转——首先把手腕处尽量往后翻(图16).我们注意到大拇指和其他手指仍然是它们原来的样子(图 17).现在我们把它们拽出来,图 18,但是中指保持不动.先生们,请注意,如果我们把手腕洞封闭起来,那么所有这些由这位饱学的博士称为新"外部"的现在是黑的;但是中指又怎么样呢?它是里外翻转呢?还是我们只是在玩弄文字?

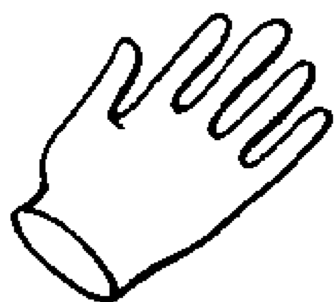


图 15



图 16

【141】

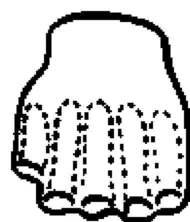


图 17

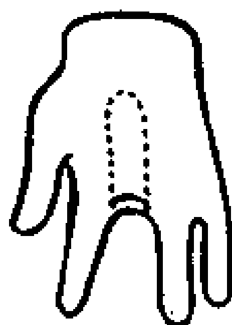
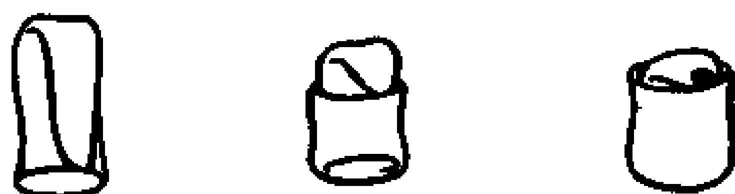


图 18

赛塔斯:但是那不是个环面!

琼斯(狡黠地):我的值得尊敬的对手是热衷于展示拓扑等价性的,那么我是否可以提一提一只手套在封闭手腕洞后是一个拓扑球面?倘若我们从一个只有一个手指的手套着手(图

19)并把末端缝合到开口处：现在我们像博士所说的那样开始翻转．我们不断地翻，瞧呀，我们根本不能把它里外翻转到一半以上，即便把末端塞回到里面也不行．如果在末端有一个小洞，我们就有了一个带小孔内胎的准确同胚．



【142】 图 19

赛塔斯：它会被翻转的！

琼斯：我可以要求您详细说明图 18 中中指的情形和其他情形之间的差别吗？

赛塔斯：它是这个……荒谬！哈！我知道了！（走到黑板）这里（图 20）是个空心的带孔的球：我们通过这个洞把它从里到外翻过来——你确信这种可能性吗？现在我重新封闭上这个洞并把它向里面推（图 21）——这个不就神秘地但不要说成是语义上地消失掉半个翻转吗？

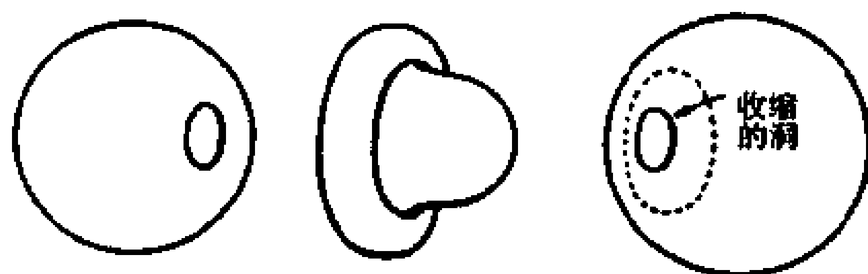
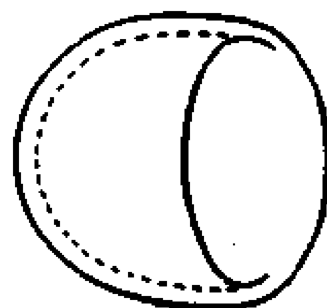


图 20



【143】 图 21

琼斯:这种情形是的.但是我们讨论的是环面.

赛塔斯:允许我问一下,能把一个环面做成比我的更好的里外翻转吗? 它的全部原来的里面都朝向外面了.

琼斯:允许我来一试.(拿了内胎并取出剪刀和快干胶接剂.)我剪开它,图 22,我翻转这个得到的圆柱,图 23—25,全部都翻完了,再把切口端线粘起来,图 26.我想大家都会同意这就是可以真正被称为一个翻转了的环面.它看起来像原来的那个;不像一个空心的茶杯把.

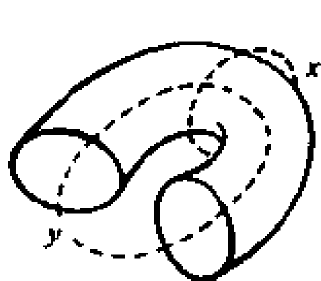


图 22

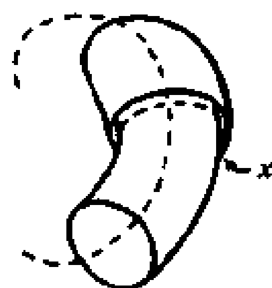


图 23

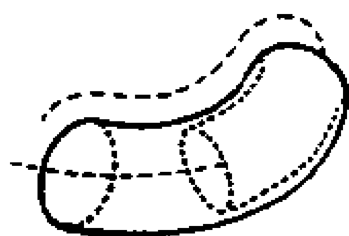

图 24


图 25

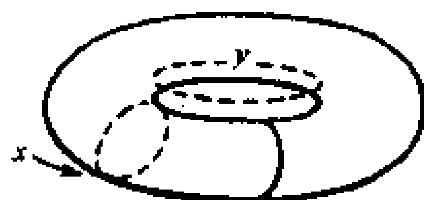


图 26

赛塔斯:从拓扑学来看,你行不通:按什么标准表明你的环面比我的更加真地被翻转了? 【144】

琼斯:让我们回到您自己的图上去.我倒想要你去参照一个拓扑不变量:链接性——

赛塔斯:嘿! 那不是——

仲裁人:等下再说,博士,等下.继续吧,琼斯先生.

琼斯:两个链接在一起的闭曲线不能用任何拓扑形变把它

们解开. 我现在在你的图上加上两条这样的曲线(图 3—13):一条 x,环绕在管状部分,而另一个 y,穿过整个环面. 可以观察到,它们是链接的. 我把它们画在你所谓的翻转的每一个步骤上,而最终它们仍然是链接的!

赛塔斯:那有什么差别吗?

琼斯:在我的这个上它们是不链接的(指出图 22—26 的虚线).

赛塔斯:那不公平! 你切开了其中一个圈……(当他意识到在他的翻转中即使这圈被切开,链接性也不会改变时他放弃了此项争论.)这点是不足奇的:在穿过 n 维空间时链接性不是不变的. 每个人都知道,正因为这个道理,在超过 3 维的空间中纽结是不存在的!

琼斯:可以让我们回到我的对手的主要宣布:"所有里面的
[145] 表面都被做成面向外部的空间"上吗? 这同样是说,如果想象在所涉及的表面上投射出一系列的线,就像图 27 表示出的内胎的横截面那样,根据博士所说,它们伸进(也连同它们的邻域)内部空间. 他施行了他的形变而现在它们伸进了外部空间(图 28). 但是,我希望他回忆一下,图29是拓扑等同于图30的,而且加

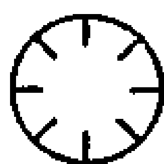


图 27

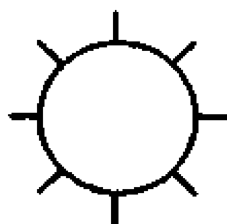


图 28

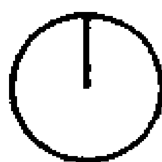


图 29

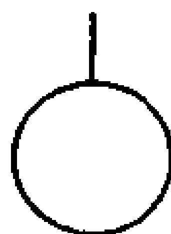


图 30

上另外的维数便允许这个形变.

赛塔斯:但是我并没有利用过第四维!

琼斯:我也没有利用过它来解开圈套.

赛塔斯:或许没有,但是在您早先的论证中暗含了在曲面上那些放射状小线段的存在性.当您谈到半个我的环面"正好是它在开始时的那个样子"时,您真正在说的是这些线段,它们在翻 【146】
转前彼此相指,而后它们依然如此.您自己承认过,那是拓扑平凡的.进一步说,如果环面有着沿圆环方向的纹理,如图 31 那样,我们发现在我的翻转后它却沿着另外的方向(图 32),而且当然在两个表面也都如此.这是真正的变化!

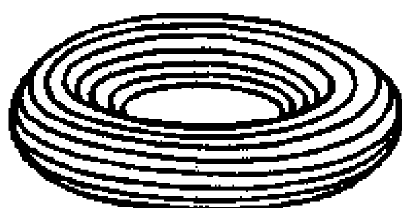


图 31

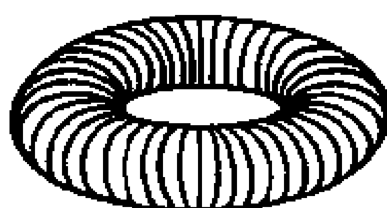


图 32

琼斯:我觉得您已离题十万八千里了.里外翻转在什么情形下是一种性质,又在什么情形下是一种表象?我应该说,你的变形全都属于另类!(他们喘着粗气,互相凝视着.)

仲裁人:现在我来总结一下.在赛塔斯博士方面:(1)他把内部表面变到了面向外部空间,我倾向于说,那是通常意义下的"内与外";(2)从拓扑上说,他开始于环面也结束于环面;还有(3)说到它的价值,他把圆柱式的"纹理"改变成了圆环式的.另 【147】
一方面,琼斯先生有(1)也把里面的表面变到了外面,(2)他也从环面开始并以环面结束,还有(3)他并没有改变纹理,但他解开了链接的曲线而赛塔斯博士并没有影响到它们的链接.陪审团将乐于考虑他们的裁定.(他们将这样去做,或许读者将加入他们之中来帮助决定判定该是什么.作者觉得这个问题讨论起来可以消磨整整一个晚上——在某种意义上说这是个定义的问题,但是正如可敬的博士会说的,这绝不是一件平凡易事.) 【148】

第10章　连续性与离散性

“下一个数”

不管韦氏大字典是怎样说的，过份细小的区分和吹毛求疵并不是一回事．拓扑学对于精确的尺寸和形状而言宁愿采取一种模糊的态度，但是对于准确的含意却是极端仔细的．我们感觉我们了解连续直线的意思是什么：那是说它没有空隙，但是这个定义需要改进．一条有一个空隙的线被分成两段，但对一张网又如何呢？再例如，我们会想到1到20间的整数的排列，如果13不在其中，我们会说有一个空隙，但如果都在，就会说没有空隙；这是一种意思．但是如果是这些对应于一把尺子上刻度的数(大家都承认这是不完全的，因为它们很少细分过32分之一英寸)，
【149】我们又该如何使这一系列数连续呢？它是什么意思？我们可以继续在它们之间再填上更小的分数，然后再在它们中间填上，永远下去没有尽头吗？如果这个过程没有尽头，(也真的不存在那一步使我们可以说所有的数都在这里了．)我们也永远做不到．即便我们说有这样一个尽头，我们又怎么能说我们不再能在这些最后的数之间再放进更小的分数了？

或者换一种方法，我们从一个端点开始，然后放一个点在它旁边，等等一直下去．然而如果按几何书上常说的，一个点只有位置没有大小，在任何方向都没有；而另一个，它也无大小可言，要把它作为下一个点则意味着它们之间没有距离．这就表明它

们具有相同的位置，而点与点之间的唯一区别就是它们的位置，从而就是说它们是同一个点：因此我们不能够放置下一个点．这是极强的过细区分，在拓扑上是重要的．

具有相似情形的事是求极大和极小的问题．如果我们定义了包含 1 和 2 及其之间所有分数的一个集合，那么 1 是最小，2 是最大．但是如果我们说“大于 1 而小于 2”的数，事情就不同了．最小数应是在 1 上面的下一个分数而最大的应是在 2 下面 [150]
的下一个分数——但都指不出这两个数来．(第一个例子是叫做数的一个闭集，第二个是开集．这种区别似乎不太重要，以后会看到，它在关于事物的集合特别是点的集合的推理中是有用的．)然而对数的讨论中什么东西与拓扑有关?

要解释这点，我们将不得不审视一下，任意东西的集合的思想意味着什么．我们将看到关于集合的某些推广和定义，它们对于组成集合的单个成员没有任何含意．这使人联想起拓扑学忽略个体差别的方式了，譬如由闭曲线围成的图形间，拓扑学把它们作为一个具有某种共同不变性的群体来处理．这不是巧合．

连 续 性

当某个东西不是连续时我们称它是离散的．所有整数的排列是离散的，虽然它是无限的．海滩的沙是离散，还有水，当我们考虑它的分子时，也是离散的．只因为它有无穷多个点就说一条直线是连续的，这是不够的：在它上面有无穷多个有理分数，然而对于留下的无穷多个总能放进更多点的空隙又怎样 [151]
呢？当然，“有理的”表示任一个由一个整数除以另一个整数的分数：$\frac{n}{m}$．任何一个可以想到的有理数都可以写成这样（8 为$\frac{8}{1}$)，但是无理数，像 π 或$\sqrt{2}$，就不能这样写，它只能被近似地这样表示．

作为规则，拓扑学家把“连续”这个字眼的运用限制于过程而非空间：一条直线是个一维空间，但是如果我们必须把这个字眼用于一条直线，那么连续性使这条直线上的所有点的集合与所有实数的集合相联系．实数表示有理的和无理的数．已经证明这些无理数至少有像有理数那样（无限）多个．主要差别在于有理数是可数的而无理数则不是．这意味着它们可以被编号：1，2，3 等等直到 ∞；可以是这样一种意义，即我们知道如何去编号而不至漏掉一个．在所有的有理公式，$\frac{n}{m}$，的情形，虽然我们不能按自然序列去数它们（因为我们永远说不出下一个数是什么），但有一个聪明的妙计能数全它们．

所有的整数写成如下分数：$1=\frac{1}{1}$，$2=\frac{2}{1}$，等等，而其余的化成它们的最简分数，因为否则我们会继续列出同一个数的多余
【152】的表示：$\frac{12}{10}$表示$\frac{6}{5}$等等．我们现在从$\frac{1}{1}$开始，然后$\frac{1}{2}$，然后$\frac{2}{1}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{1}$，$\frac{1}{5}$，…，方法是当我们往前数时增加的不是分数值而是在分式中用到的整数的和．因此$\frac{1}{1}$显然具最小和；$\frac{1}{2}$和$\frac{2}{1}$是下一个，而且按它们的实际大小写下来．而后是$\frac{1}{3}$和$\frac{3}{1}$（每个所涉整数加起来为 4），再后是$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$（加起来为 5），等等．在我们往下做时，那些没有出现的数，像是$\frac{1}{4}$与$\frac{1}{3}$之间的分数，就会越来越多的填写进来．按 1，2，3 等等那样编号．我们永远不能数到尽头，但是我们知道我们已经把分数按照一种新的而且符合逻辑的方法排列，使得每个有理数都会出现并只出现一次．这表明我们能对每个分数唯一的编号为第一，第二，第三等等．

这个表展示了有理数及下一行的分子分母和，还有再下面的序：

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{5}\cdots$
2	3	3	4	4	5	5	5	5	6…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10…

数的或点的或可以完全是任意东西的集合,如果它可以被 [153]
编号(可数)的话,则是离散的.对不可数集,如像所有的实数的集或直线上所有点的集,要描述它的最受喜爱的字眼是说它是一个连续统而不是说它是连续的,因为通常后者指的是一种过程.一个变化的数通过了一条直线上所有的点:这个推移过程是连续的.

因而我们看出有两种指向无穷的方式:1,2,3,…到无穷;或者一条直线段中所有的点.更重要的是,这些中的每一个有两种无限性:可数,例如有理数;以及不可数,例如直线上的所有点.

邻　　域

读者可能记得在第104页上琼斯先生谈到了某些直线连同它们的"邻域"伸进"内部空间".我们明白他的意思是什么,也就只在它们的那种情形下才清楚,而它的意义是相当模糊的.尽管有对点的,无限性的,等等的细微区分的精确性,但一种控制某些东西的不精确性方式也是有用的.例如在78页中我们提到了铺砖定理,提及一个区域不大于"一个选定的度量".这是十分含
糊的,但是它的含意是铺砖定理可用于不管所选尺度如何小的 [154]
情形.这是理解下述语句的一种方式:"它有某种大小",同时还有"它是无穷小的,或无大小的",后者是极其糟糕的荒谬和模糊不清,而前者至少没有矛盾.

相似地,有一个谈及空间中一个点"充分靠近"另一个点的方式也是有用的.其意义与铺砖定理中的"选定"具有同样的味道:它表明"如你所要的那样靠近."至于提到一个点的邻域所说

的不是这个邻域有多大，而只是说它包含了这个点而且是以这样一种方式使得我们可以放入我们想要多靠近这个点就可以多靠近的一个点在其中.对于另一个点到底有多远这点来说这是相当不精确的；虽然在可测(度量)空间中我们可以用 ε 来标出邻域的直径，但并没有向我们许诺 ε 的大小.这个点 P 的 ε 邻域意味着在其中的所有点距 P 小于 ε.注意，我们没有说"ε 或更小"而只说"小于"，它表示这里没有极大值.(见前面关于极大极小的讨论.)

像所有的不精确情况一样，它允许了精细的微小区分.假设
[155] 在一条直线上我们选取了一个线段 S(图 1).在 S 上有个点 P，而它有邻域 N.有一点是清楚的：N 至少包含了 S 中一个其他的点.我们也能够说成是这样的：如果我们定义线段 S 为"对应于大于 1 而小于 2 的实数的所有的点"，则在某种程度上，我们有一个没有端点的空间，是 1 维的.这就是无极大和极小的意思(见第 107 页).倘若是这种情形，由于我们同意一个点的邻域可以按我们的选取的那样小，那么，我们现在能够说，S 的每个点有一个邻域，它整个地含于 S 之中，即它不包含 S 之外的点.并非 S 中点不能有大到包含 S 外面点的邻域，而是如果足够小的话，它们不包含 S 外的点.

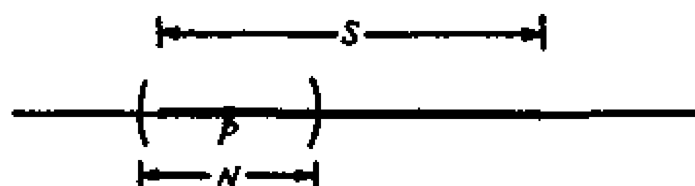


图 1

当然，我们不能把这个推理用到端点上，但正如我们所知，在 S 中并没有任何端点.它完全是定义的事情；精确的定义不
[156] 断在数学中出现.对定义的需要有时是基本的：事物被认定是准确的是有关一个东西是否它自身是准确的.

小结一下：像我们在第 107 页上说的那样，在一条对应于大于 1 而小于 2 的数的点构成的线上，如果我们选取一个靠近 1 的点，则我们总能选取一个在它与 1 中间的点（图 2）. 如果有人放下另一个更靠近 1 的点，而后宣称它是如此靠近 1，以致没有其余的空间了，那么，我们回答是他企图做不可能的事：放置 1 的下一个点是做不到的. 因此，如果他放下的不是 1 的下一个点，这就还有放另外点的空间，那就是在邻域中，在他的点的两侧它只包含了线段 1—2 的点.



图 2

读者大概已经注意到，这个线段就是我们所提到的点的一个开集合. 在一个闭集中，譬如包括了 1 和 2 的线段，上面关于邻域的论述就用不上，这是因为端点 1 和 2 不会有邻域不包含至少一些低于 1 而高于 2 的点，原因是 1 和 2 被包含在此集合中. [157]

极　限　点

在拓扑学中一个极限点不像是听起来的那个样子. 它不表示是边界点，尽管边界点可以是极限点. 例如，对应于所有实数的所有点都是极限点. 按一种通常的（而不是唯一的）定义，极限点是这样的点，它的每一个邻域包含了这个同一集合中其他的点，在上述情形下直线就是此集合. 这个定义听起来有点怪，除非我们认识到在这里“极限”具有相当特殊的意义.

举个简单而或许有点特别的例子：你面朝着一堵墙站着，你朝它走到一半距离的地方，然后再走剩下来的一半，等等. 如果每个步骤花去 1 秒则你永远走不到这堵墙，因为将有无限多步要走，然而，这堵墙是你的进程的极限. 你所做的事是，当总距离

是两英尺时，你走了 1 英尺，然后$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，…英尺等等；尽管是分数的无穷级数的和，其总数应是 2. 由定义，每次你只走了到墙的一半距离而绝不是全部剩余的距离，那么按这个观点你永远到不了它. 这是那个古老的关于阿喀琉斯与乌龟的争论：
[158] 他抓住乌龟了吗？

我们知道，不管定义如何，他抓住了它，因为他并没有采取那些消耗时间的步骤. 他以常速度进行，其运动的图形由图 3 表示. 他的运动曲线在图中是条直线，因为其速度为常数，这与他通过无穷多个分数地点无关. 如果他在第一个$\frac{1}{2}$英尺花去了 1 秒，并且在此后每个分数地点都花去 1 秒，其图形就是那条弯曲的虚线，而且就涉及时间而言，他就会永远追不上乌龟即顶上的那条斜线. 但是，如果我们把阿喀琉斯在这些持续不断的分数距离上所实际花费的时间加起来，它们得出一个有限和：第一个半程花费的时间的两倍.

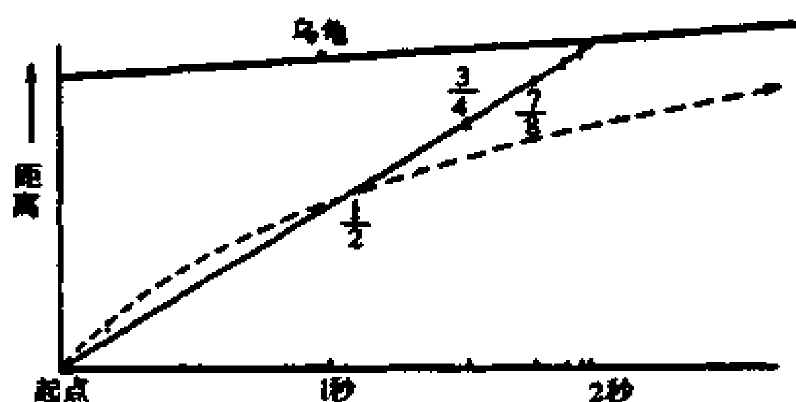


图 3

使得乌龟和墙壁成为极限点的是它们可以被达到或趋近，
[159] 这是越来越靠近的方式，是个连续的过程：我们不能够跨越过它. 换句话说，我们能够按我们所选取的程度来靠近它，虽然是非常随意的，在拓扑学中却是非常重要的. 这里有个 2 维情形下的极限点的例子，我们把它作为问题提出来. 其证明无需高等数

学，只要初等几何和普通的逻辑推理即可.

在平原上有一个人，他朝正西走了 1 英里，然后正北$\frac{1}{2}$英里，再正东$\frac{1}{4}$英里，再朝南$\frac{1}{8}$英里，再后朝西走前面的一半路程等等. 每次他都坚持作了正直角的拐弯，而且每次都走了前一次路程的一半，因而他按一种方形螺线前进，如图 4 所示.

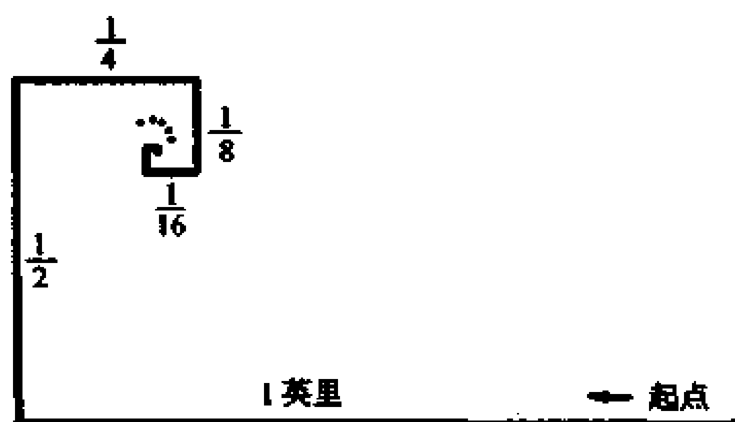


图 4

他到哪里是个头？容易看出，他总共走了 2 英里，那么如果 [160]
他以常速到达那里，能否用直尺和圆规找出或标出这个准确的地点？答案见附录.

还有另一类极限点，它只涉及时间而不涉及空间，因为位置起不了作用：如果你在海上的一个木筏上，重要的是及时把你救起来的那个时刻. 如果你搭乘了一艘在下沉的船，救生员是否“及时地”救了你？那个及时的“时”就是一个极限点；但是如果是搭乘那艘船还是另一艘的问题，它就不是. 它依情况而定：2 作为整数中的一个它不是一个极限点，但是它作为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$ 的和，或者如像 -1 到 3 中所有实数中的一个，就是个极限点. [161]

第11章 集　合

逻辑真实还是单纯的真理

伯特兰·罗素(Bertrand Russell)曾说过,在数学中我们永远不知道我们在谈论的是什么. 这表明现今数学关心的不是真理而是逻辑真实性. 不是关心它是否必须应用于现实的世界而是它在自身的范围内并按照自身的规则时它是否有逻辑意义.

在古代,人们把欧几里得(Euclid)几何想成是应用于我们周围空间的东西,但是自从爱因斯坦(Einstein)以来,当我们采用了一个足够大的样本时,望远镜发现这个空间并不是欧几里得的. 即便证明它是欧几里得的也不会使欧氏几何有更少或更多一点逻辑真实性,仅仅附带地多一点可应用性罢了,而数学并不关心它的应用性. 当然数学能被应用是件令人愉快的事情.

[162] 基于这个理由,人们对一个狂热地谈论无限性的数学家一定不要产生误解:他不打算知道他谈论的是什么,即便存在实际的无限性,至少也不是借助于它来谈论. 恰如一个几何学家谈到一个直角时他不是提出在某处有一个真实而精确的直角:他指的直角是个概念,一个理想的东西,对于它可以进行一些逻辑的推理. 在数学中有许多不同的无限性和不同的情况,在其中可以对它们进行推理. 要考虑的是关系而没有太多考虑那些呈现这些关系的事物. 像大多数数学家一样,拓扑学家最终还是背离了正常状态:最初拓扑学处理的是那些我们的感官感觉到

的东西，而后越来越多地处理这样的课题即他们应该怎样对待它们．最终这些感觉到的事物，即最初讨论的那些东西被抛在一旁，完全不予过问．数学家经常按此方法做出他们的最好工作．

如我们在前面所看到的，拓扑学的目标是事物的不变性；然而如果事物是非常一般的话我们不得不以某种方式来指出它的属性；最好的指证方法应保持存在于拓扑不变性之间的关系；这个方法就是把它们作为一个群体或者集合来处理．现在我要展示我们是如何在一点也不知道它们是什么样的集合的情形下来处理集合的．【163】

维 恩 图

我们从一个书架的书的集合着手，这些书有精装的也有平装的．我们不关心它们的次序以及数量，然而在这种情形下我们知道在谈论的是什么：书，不是世界上所有的书而是我们的集合，S．其中一些是平装本，它们构成了 S 的一个子集，称此子集为 P．通常定义这个的方式是说，*如果 P 是 S 的子集，则 P 的每个元素都是 S 的元素*；这里指的元素在我们的情形是书．为书写方便，将此记为 $P \subset S$．精装本的书也构成一个子集：$H \subset S$．有一些书是外文的，它们被包含在子集 P 和 H 中．我们以图 1 来作为它的图形表示，其中集合与子集都表现为面积，但

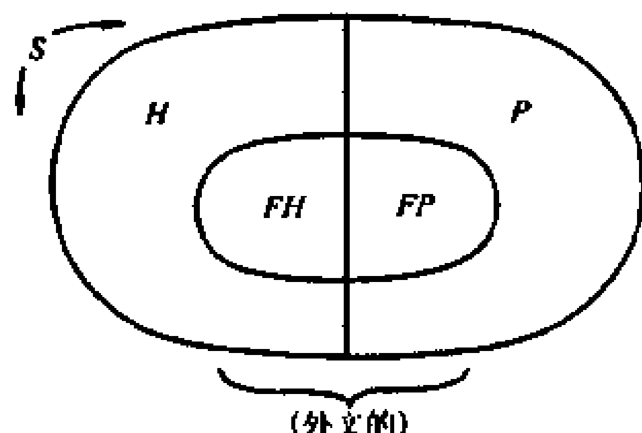
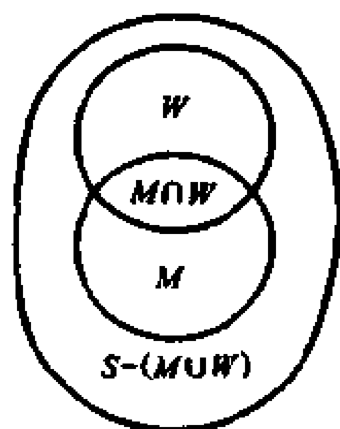


图 1

[164] 是元素的位置和相对数量并没有标出. 显然一本书不可能既是精装又是平装的,从而这两个集合不相叠合. (一个子集就其自身而言应看作一个集合.)它们互相排斥;不相交. 我们在此看到面积 S 被分成 H 和 P,它们两个子集都与那个更小的卵形的外文书集合有叠合,构成了 H 和 P 的两个子集: FH 和 FP(见图 1).

我们能画另一张图来表示谁读了什么. 为此我们将用更加正统的维恩(Venn)图(图 2): M = 丈夫读过的书, W = 妻子读过的. 其相叠合部分表示两者都读过的书,这块面积是 M 和 W 的交集,记为 $M \cap W$. 未读过的书是 S 中在 M 和 W 之外的面积. 对所有被读过的书的集合,我们用 M 和 W 的和(或并)来描述. 我们记其为 $M \cup W$,它包含了 $M \cap W$. 它的意思是"在其中一个中或都在两个中."因此没有被读过的书的集合可以写成 $S-(M \cup W)$. 我们可以把图 1 中两个不交的集合或子集记作 $H \cap P = \varnothing$,表示 H 与 P 不相交.



[165] 图 2

维恩图能够用来说明一些逻辑关系:如果(1)所有的书都是印刷的,以 P 表示,(2)所有的印刷都是用油墨的,以 B 表示,以及(3)所有的书都是油墨写成的,以 I 表示. 在图 3 中唯一需要

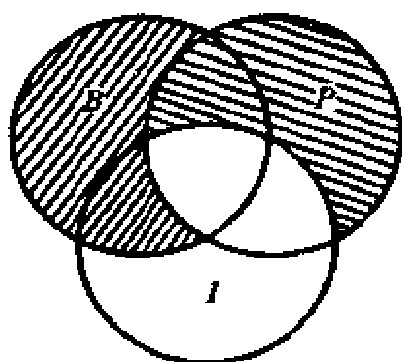


图 3

考虑的书是在 $B\cap P$ 中的书，因为没有不经印刷的书(1)，故而涂抹掉 B 中不在 $B\cap P$ 的部分. 然后我们涂抹掉 P 中不在 $P\cap I$ 的部分，因为除了用油墨外没有其他印刷(2). 从剩下的东西看出，在 B 中只留下了 $B\cap I$ 中的东西，或者说，所有的书都是用油墨印的. 这是简单到习以为常的事实，但是如果我们用 4 个子集来试一试就相当复杂了，这里的 4 个子集中没有两个是相互排斥的(如读过和未读过那样). 事实上仅仅画出四个集合的维恩图就是个小小的难题，因为它要表示出每一种可能的组 [166]
合，要同时画出 1 个，2 个，3 个和 4 个的相交情形. 在画图时最好首先列出所有的组合：一共有 15 种，一般情形为 2 的 n 次幂减 1：2^n-1，其中 n 是集合的个数；但如果算上没有任何集合的情形，则是 2^n 个. (出于公平，要提示一下：这些集合不能被画成圆形，那怕是近似的圆；必须把它们画成长长的卵形才行. 答案在第 122 页.)

上面提到了一类空的子集，它没有任何元素，如在想象的纸上非印刷的书的集合那样；称这个集合为空集. 这可以看为一些拓扑学家所作的人为约定，如果总是坚持这个约定则会出现复杂的情况，但对代数集而言它都是有用的. 一个似乎不是完全代数的确为有效的例子是，在一个称为二十问的游戏中：如果一个人选择了“面包圈上的洞”而问题是问“它是蔬菜吗?”(与无机物相反的问题)，很难对此作出是或否的回答，因为很可能想



到它取决于包裹着面包圈的是什么：空气还是牛奶．毕竟它现在的样子是由面包圈材料做成的（如果不是完全由它们组成的话），故而最好的回答或许是它是面包圈颗粒的一个空集．这个
【167】游戏不许有这种回答，或许就不妨如此吧．

把因许多相交的子集导致的复杂性放在一边，有一些定理只涉及到三个集合，它们出奇的精妙，这不是一下子蹦出来的想法．举例说：

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

这个公式表示：“*A* 及 *B* 与 *C* 的交的和等于 *A* 与 *B* 的和及 *A* 与 *C* 的和的交．”像这样的公式，多少有点难于想象．以日常用语来说它表示：“所有有怪癖的*或者*有金黄色的卷曲头发的*或者*两种都具有的人群，组成了所有那些同时在有怪癖或金色头发的或两者都是的人群中*和*在有怪癖或有卷曲头发或两者都是的人群中．”这有一种模糊的含意：第一部分强调的是*两者居一与或者*而第二部分强调的是*和*．语法能允许我们这样写吗？对这个句子的精确意义的严格关注会使人如同受到一点催眠术那样，然而以维恩图来表示则一切变得十分清楚，见图 4．在图 5 中我们有整个圆 *A*（所有的有怪癖的人）．图 6 中我们有交 $B\cap C$（金色的卷曲头发的人，非 *B* 或 *C*）．图 7 中我们把它们加起
【168】来：$A\cup(B\cap C)$．然后，对等式的第二项进行相似的做法：图8

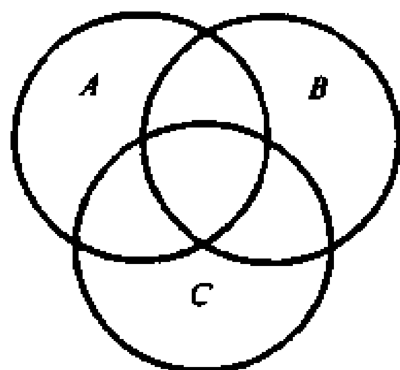


图 4

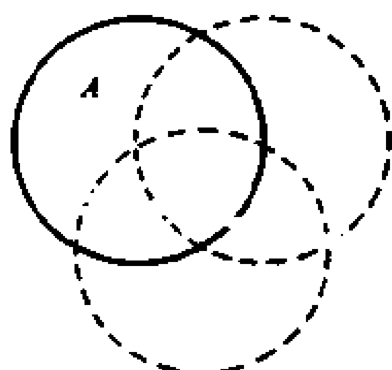


图 5

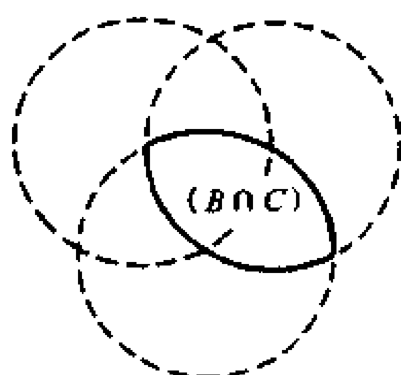


图 6

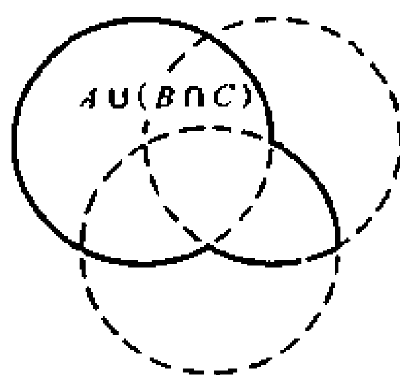


图 7

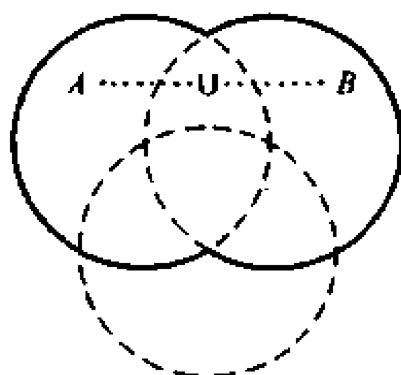


图 8

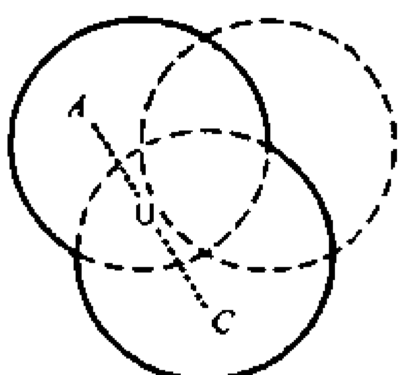


图 9

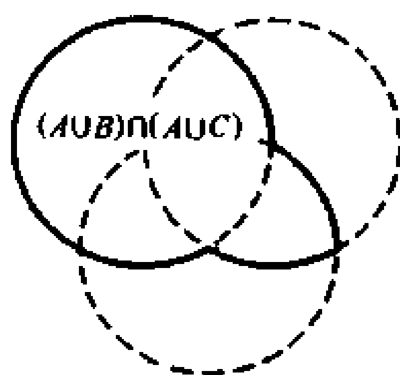


图 10 【169】

中我们有整个的 A 和 B（包括它们的交，即由有怪癖的或金发的或两者都是的人组成的人群），并且在图 9 中是整个的 A 和 C（有怪癖的或卷发的或两者都是的人群）．在图 10 中我们把图 8

和图 9 叠加起来看一看哪些是重合的，其结果与图 7 的相等. 证完.

对维恩图有时最好使用第 117 页上的“涂抹”的方法. 由图 1，我们从中涂抹上精装书与平装书的交集，因为没有这样的书：$H\cap P=\varnothing$. 然后我们涂抹所有外文书在 H 和 P 以外的部分，因为我们没有未曾装订的书：$F-(H\cup P)=\varnothing$ ，这样得到了图 11.

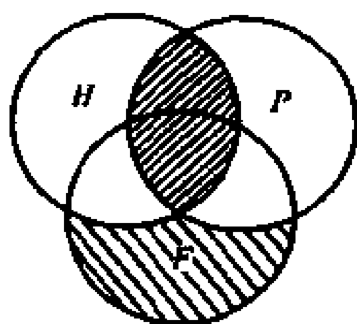


图 11

这并没有告诉我们任何我们还不知道的东西，故而图 11 是相当清楚的. 那么再看看图 4—10，如果在等式的第一项中把次序颠倒一下就会引起麻烦：$(B\cap C)\cup A$. 我们会倒霉地从涂抹掉 B 和 C 中所有不相交的地方开始(图 12)，而当我们把得到的加到
[170] A 上(全部 A)，我们就不得擦去 A 中刚刚涂抹的部分. 因此使用粗重的轮廓线条或至少是一个逐次进行的系列图，有时更加清楚. 小结一下：

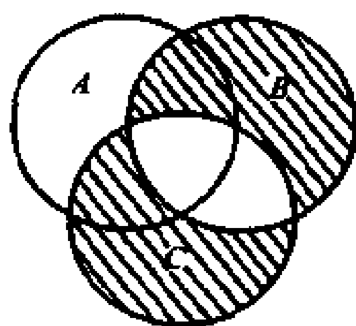


图 12

1. 集合 S 的子集是一个集合，它的元素也是 S 的元素：$A\subset S$.（当一个元素 P 在或说属于 S 时，我们记为 $P\in S$.）

2. 两个集合 A 与 B 的和是一个集合，它的所有元素在 A 或 B 或同时在两者之中：$A\cup B$.

3. 集合 A 与 B 的交是一个集合，它的所有元素同时在 A 与 B 中：$A\cap B$.

4. 当 A 为 S 的子集，A 的补集是 S 中不在 A 的部分（或那些元素的全体）：$S-A$.

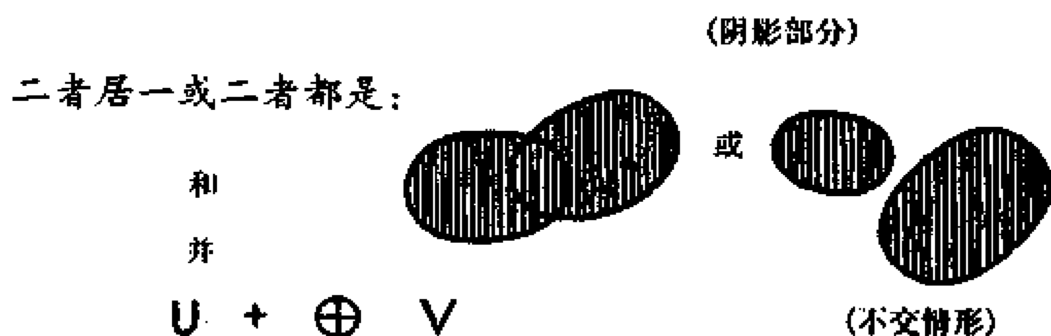
在拓扑学中补集的观念是重要的；我们可以立刻将其应用到圆盘上：如果圆盘是一个曲面上涂黑了的区域，那么没有被涂黑的部分就是它的补集. 集合 S 在万有集中的补集可写成 $U-S$. 把集合用于拓扑学时，它变得愈加重要了. 在集合中就像在几何中一样，我们找到了大量的定理，虽说似乎不是很重要但不一定是显而易见的，然而它们却有助于建立一个协调一致的，独立存在的整体. 我们列出其中几个能由读者用维恩图证明的定 【171】
理.（注：下面可能是个好主意：把后面的表复印出来并展现在显眼的地方，直到所有的符号都被熟悉为止：$\subset$ 是……的子集；$\in$ 是……的元素；$\cup$ 是和；$\cap$ 是交；$A-B$ 是 B 在 A 中的补集.）

1. 如果 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$.
2. 如果 $A\subset B$，则 $A\cap B=A$.
3. 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$.
4. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.
5. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

在继续讲之前，我们必须警告一下：这里所用的符号并不是被普遍采用的. 如果读者在其他书中去读这个课题的话，他就会发现对同一件东西会用不同的符号. 我们把其中一些列出来：



二者居一或二者都是：



[172] 图 13

同在两个之中：



图 14

是……的一个元素：

∈，有时写得很小，甚至会与 ε(希腊字母)混淆.

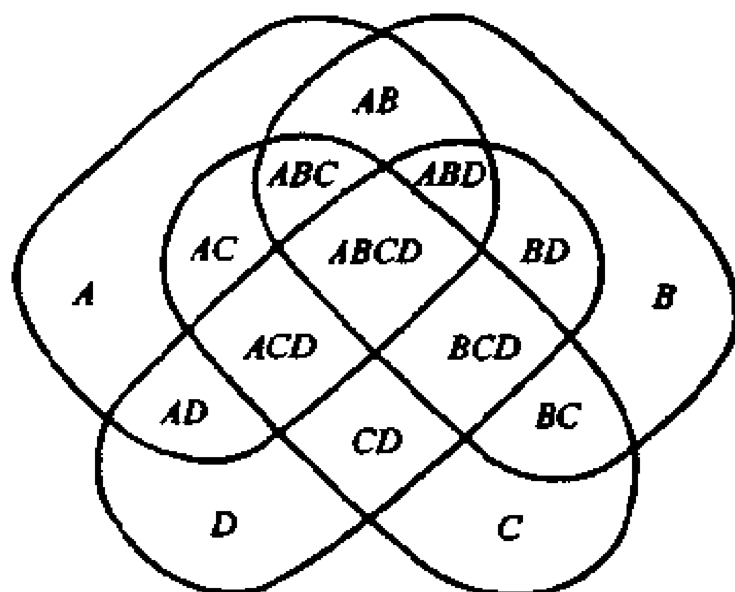


图 15

对于第 117 页提出的难题，其解答在图 15 中. 现在再试一试五个集合的情形. 答案在附录中. 【173】

开集和闭集

至此我们所提到的是人或者书的集合，而在拓扑学中集合通常是由点组成. 当这些点是他们在几何中所用到的点时，拓扑学家称这些点所在的空间为欧氏空间. 这时，一个平面本身就是个 2 维空间，常记为 E^2. 一条直线记为 E^1，其余的有 E^3 等等直至 E^n. 我们现在要讨论的空间都是欧氏的，它们是度量空间. 在解释这个词汇之前，我们必须记住：我们的目标总是指向一般的情形，因而我们希望找到能用于任何空间的关系和定理而不要借助于度量，并且这些点也不再是欧氏空间的点而是任何没有特殊指定的东西，对它们我们能有意义地应用这些关系. 这一类的推广对数学而言是自然而然的：六双总是一打，不管指的是大面包还是日子.

在拓扑学处理度量空间时，它表明这些点具有某种次序；它的意思是，如果点 a 与点 b 间的距离为零则 $a=b$. 还有，a 与 b 之间的距离和 a 与 c 之间的距离的和或者等于 b 到 c 的距离或者大于它(图 16). (相等的情形只在 $a=b$，或同时有 $b=c$，或者 $b=c$.)这十分简单，但注意它并未特别说明大多少，只是说 【174】
大于，或说相同，或小于. 尽管它引进了距离，但是拓扑学力争将它作为一种规则而不是距离本身. 这里它没有破坏它自己的规则，只不过就一种特殊情形运用了自己的规则罢了. 当这些方法被用于那些没有参照距离的空间时，闭集和开集变得至关重要. 之所以这样说，是因为这种特征在一切形变后仍然保持，而距离已被忽略了.



图 16

让我们考虑直线上的点所组成的空间. 那么,开集的一个最简单的例子是“所有对应于大于 0 而小于 1 的数的点.”一个闭集的例子是“所有对应于大于等于 0 而小于等于 1 的数的点.”然而还有更好的定义.

对于“开”,我们多少有些重复在第 110—111 页中所说过的:一个点集(即点的集合)是开的是说每个点都有一个邻域完全在此集合中. 只要记住第 111 页的论述就不难明白这点. 如
[175] 果我们的集合是在一维的万有空间即一条无限长的直线中,则此开集便是一条没有端点的线段.(端点也被称为边界点.)

对于“闭”,其定义却不是简单地从反面来说. 它是:如果一个集合包含了它的所有极限点则它是闭的. 听起来颇有道理,但为什么要突然跳到极限点呢? 其中该强调的字眼是所有. 前面的定义中,开集只由极限点组成,然而不包含其中的端点. 虽然它不在其中(由定义)却仍是极限点,它由集合中的点所趋近;这种定义极限点的方式是第 111—113 页给出的. 集合中的点可以按我们的要求那样任意靠近两个端点之一:因此它们是此集合的极限点. 如果现在把它们加进这个集合中即按定义成为其中的成员,那么现在这个集合包含了它的所有的极限点,因而是闭的.

如果我们在原来的定义中所缺少的仅仅是端点(边界点),这就不容许其他更精细的区分. 如果我们的没有端点的集不是在一维万有空间中而是在平面里,那么显然没有一个点有任何邻域完全在此集合中,因为这时邻域不再是直线的一部分而是个 2 维区域(图 17). 这是因为这个一般的空间,即万有空
[176] 间,是2维的,即便我们的集合不是2维的,这些邻域也必须包含那些完全不在直线上的点 p'. 因此这个集合不是开的. 那么

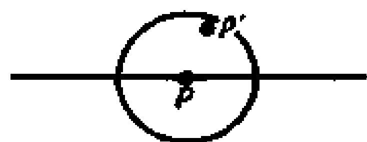


图 17

它是闭的吗？十分令人惊奇地，回答是：不．闭和开不是成双的相互排斥的属性但却是不可少的．我的集合既非开也非闭，这也是要在“闭”的定义中引进极限点的另一个理由．

上面的集合不是闭的原因在于它没有包含其所有的极限点即端点，故而非开非闭．一个点集能否既开又闭？回答是能：在上面例子中的整个平面即是如此．因为是无限的故而没有端点，就不能说什么包含它们的话：因此它是开的．然而按同样的理由它包含了所有可能有的点，因而也就包含了它的极限点，故它也是闭的．这是极端特别的情形．

因此在平面上我们有：(1)开集，例如一个给定区域，像是一个三角形的内部．因为它不包含其边界，故而它的每个点都有邻域完全包含在此集合中；(2)闭集，例如三角形加上其边界；【177】
(3)既开又闭的集，例如整个无限维空间，这在任意维数时都对；(4)既不开也不闭的集，例如平面中一个1维线段的内部，同样的理由3维空间中一个2维区域的内部也是这种集合．(对于这一系列的记号和名称中再加上一个：开集也称作区域．)

运用维恩图的思想而不需实际画出图来，我们可以通过推理得到一个开集的补集是闭的：$U-S$ 关于 U 是闭的(一点也未提到其不存在边界的外部)．它表示，由于边界点不在 S 中故而必在 $U-S$ 中．以相似的理由推出反向的结论：闭集的补集是开的．读者能够满意地证明出两个开集的和仍是开集，以及两个闭集的交仍为闭．

关于一个开集，我们可以指出下面的事实：它与其极限点的和称作它的闭包(记为 $\overline{S}$)；因为它包含了所有的极限点，故而 $\overline{S}$ 为闭集．

按定义的方式来说，邻域可以看作是开的，但是有些拓扑学家说它们也可以是闭的，其根据在这里说起来有点太深奥了．还是前一种说法听起来在一定程度上更容易接受．【178】

我们已经看到过完全由极限点组成的集合，然而，没有极限

点的集合,或者至少不仅仅由极限点组成的集合又是如何的呢?这里有一个我们在前面第112页提到过的例子,在那里我们并没有把它当作集合提出来,即在欧氏直线上对应于 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ 的点. 我也可直接取 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$,它是一个集合,除去最后一个0以外没有一个点是极限点. 之所以这样说是因为0以外的每个点都有一个邻域,它小到不包含这些点中其他的任何点. 端点0之所以是极限点是由于它是这个级数的收敛点,我们可以以这种方式来逼近它.

我们可以更进一步说,如果这个集合由这些收敛于0的分式点组成,那么对应于欧氏直线上所有实数的点中没有一个是这个集合的极限点(零点除外). 之所以这样是依据了第107页上曾用过的关于"下一个"点的推理:如果我们不能指出或确定集合中一个点的下一个点,则我们指不出一个点它没有足够小的邻域不包含集合中的点. 说得很复杂但却回避不了.

[179] 刚刚提到的那个集合只有一个极限点;能够找到不具任何极限点的集合吗? 回答是肯定的:在欧氏直线上对应于譬如 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ 直到 $\frac{1}{10}$ 的那些点的集合没有极限点,其理由是完全显而易见的. 当集合是无限时必定会出现一个极限点,至少有一个而且不必一定属于此集合这个事实是由一个漂亮的定理所证明,而且这个定理可以从直观上得到理解. 波尔查诺——魏尔斯特拉斯(Bolzano-Weierstrass)定理说,我们可以把一个无限集表示成一块面积,其中有我们所知的无限多个点,分布在里面某些地方. 它们不一定是均匀分布的(例如在最近的情形中,这个无穷多个点只堆积在零端点旁边). 我们通过中间任意画一条直线(图18),则必定有无穷多个点落在其中一侧或两侧. 假定在右侧. 然后用另一条直线将这一侧再分成两块(图19),再问同样问题,又不妨设在上侧. 我们继续地分割下去(图20):每次

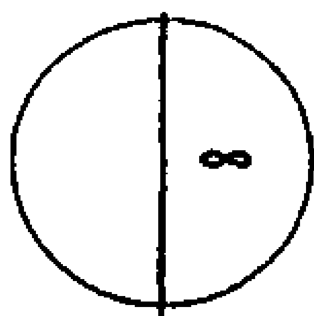


图 18

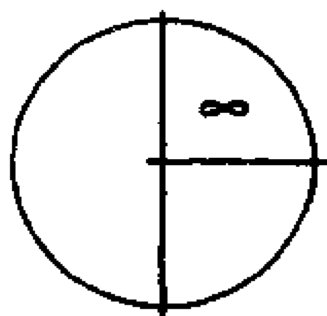


图 19

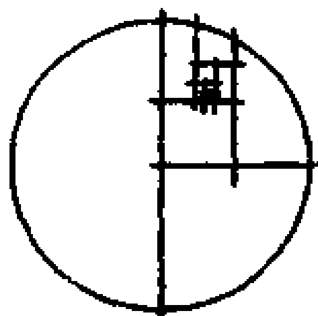


图 20 【180】

变得愈加紧密，最后靠拢在一个点，这个点潜藏着无限性. 由定义，这是一个极限点.

如果极限点(仍按定义)在集合之外，我们也能确信已找到了它. 当然，它会在集合的边界或闭包上，这就像在前面的例子中我们把零点从集合中去掉的情形. 另一方面，如果我们的无限集像欧氏直线那样，譬如是 1 到 2 的所有实数的集合，则在任意邻域中都含有无穷多个点，那么当画出直线分割集合时，在它的两侧都含有无穷多个点，因此在每一步中我们随便选哪一侧都可以，这样在整个集合的任意地方都能找到极限点，又一次证明它完全由极限点组成.

在每个步骤上没有人告诉我们该选择哪一侧这件事是无足轻重的，重要的是有这样一系列的安排来证明极限点的存在.

无限集的另一个值得注意的属性是它有一个子集与整个集合之间能够建立一一对应. 尽管这点似乎有些矛盾，我们还是来考察一下书本的一个无穷集合：它可以按 1,2,3 等等编号；我们取出偶数编号的书作为子集：$E\subset B$. 现在我们数这些偶数编号的书 E：第 1 本，第 2，第 3 等等. 我们现在把这些与整个书的 【181】
集合 B 进行配对：第 1 本与 1 号，第 2 本与 2 号，第 3 本与 3 号等等直至无穷. 这与似乎整个书本比起偶数编号的书要多这件事没有任何关系：我们在将后者配对中永远用不完前者. 这个集合是无限的，而子集也是无限的.

变 换

变换是两个事物之间的一种关系，也称它为函数. 这个词用在一个句子中有些混淆：有时作为一个名词（上面的用法），有时作为一个形容词. 它可以用于变换的过程，或者支配此过程的规律，或者它的结果，或者被变换的事物加上其结果. 称最后一种为函数要比变换更合适一些. 早先在谈及不变性时，我们说它们是在形变后仍保持的那些性质：这时，形变就是一个变换.

然而这个词有一个更一般的意义：当我们把偶数编号的书与全部的书编成对时，那也是一个变换. 这里"函数"这个词就指的是称
[182] 为有序偶的东西：现在就是书，但它们可以是点. 一旦人们说一个集合的每个元素被变到或者被对应到另一个集合的元素时，那就是一个变换. 我们可以回到环面的情形给出一个解释. 环面被塑造（变换）成一个带柄的茶杯，并标出环面上每个点，在每个点画出一个箭头指向它在茶杯上的对应点. 这时，我们可以将在茶杯把的空洞周围的点看作是来自环面空洞附近的某些地方，然而再远一些地方就难于说得清楚，特别是杯子的边缘来自何处的问题.

这个对应关系既太明确又太模糊. 那就是说我们必须知道什么时候是确切的，什么时候不是. 例如，当我们说图 21 等价于图 22 时，表明只有两个等同的点，一个用另一个来表示；取 p 及 p'. 这时像，即在第二个集合中的对应点，表示为 $f(p)$ 或 $f(p')$，意思是函数的 p：此处把它用作形容词①. 虽然我们能够



图 21



图 22

① 译注：事实上，在中文中我们常说成是 p 的函数，当作名词.

说图 21 中闭曲线上没有一个点对应于图 22 中那条半连接曲线上的任何点、但我们却说不出图 21 中任何一个给定的点对应于图 22 中哪个特定的点. 但是,在这个变换中一些东西是保持下 【183】来的:曲线与闭曲线相连接的点,曲线的端点或自由顶点,它们能够等同起来.

早先,当琼斯先生和赛塔斯博士互相提醒对方,图 23 中的图形是等同的时,他们心中想到的是更加广泛的等同关系. 它可追溯到我们在第 5 页所说的话,即一个容许的变形应许可进行那样的切割,只要在切割之后又重新粘合起来.

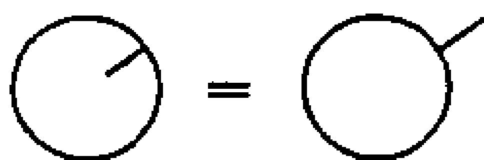


图 23

例如我们能够看出图 24—图 25 是如何拓扑等价的. 它们都由两条闭曲线 a 和 b 组成,a 具有顶点 c,在此有条线 d 相连接,而此线的另一顶点 e 连接 b. 从 c 出发有另一条线 f,它具自由端点 g. 还可作出其他的等同吗?(答案在本章末尾.) 【184】

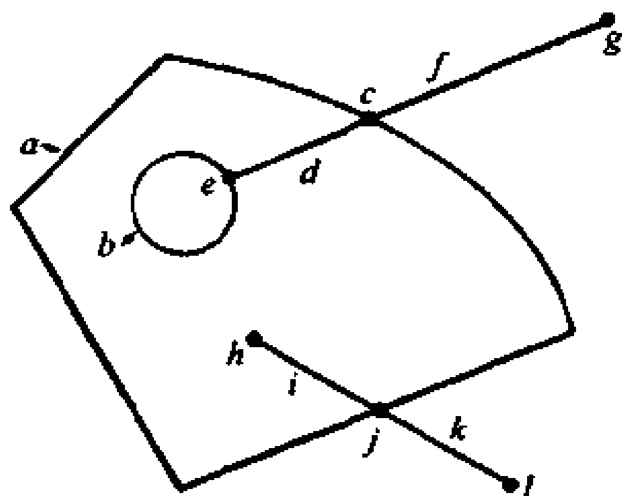


图 24

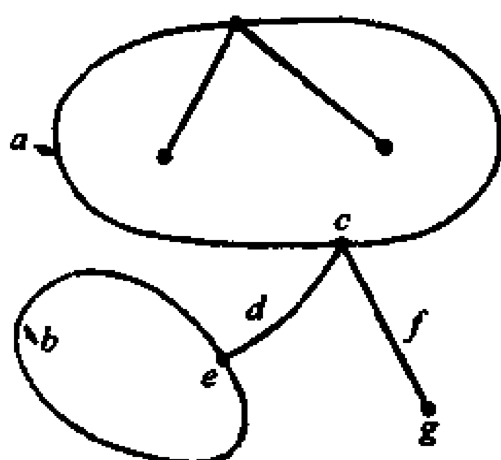


图 25

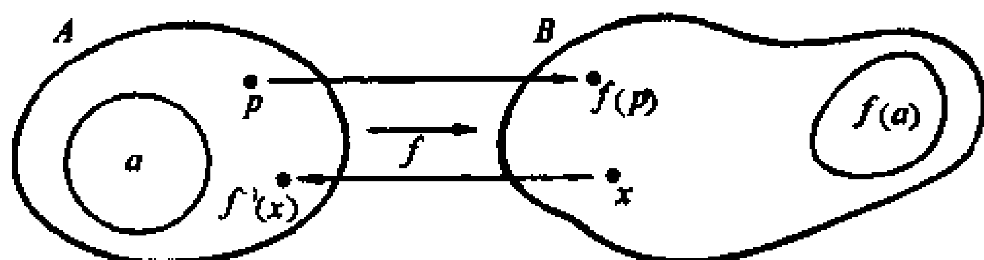


图 26

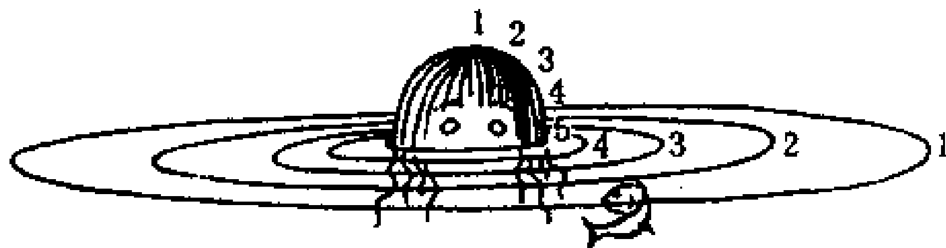
这些听起来十分不同类型的变换由类比推理是相像的，而
且有更多的公共性质. 在每一种情形，我们依照商定一致的规
则或规律或函数 f，构造了点之间的一个对应. 如果在集合 A
[185] 到集合 B 之间有一个函数或变换(图 26)，我们则说 A 中点 p 在
B 中有一个像 $f(p)$. 这也可用于子集：$a \subset A$ 有一个像 $f(a)$
$\subset B$. 也可用于其逆：f^{-1}是记号，而 $f^{-1}(x)$表示 A 中的点其像
为 x，也称为 x 的逆像.

我们先前说过，“连续的”这个字眼通常只限于用在过程(第 108 页)，即函数. 一个连续变换表示在 A 中充分靠拢的点其在 B 中也充分地靠拢：这里所表示含意的实质与我们在第 109—111 页关于邻域的说法一样. 像从前一样，我们能改进这个定义. 在集合 A 到集合 B 中的一个连续变换中，A 的一个开子集 a 在 B 中的像 $f(a)$ 也是开的. 验证一下“开”的定义(第 124 页)

便可指出它的含意是：一个集合(或子集)当它的每个点有一个完全包含在此集合中的邻域时为开. 不需要进入那些令人生畏的细节我们便可以明白，它保证了 A 中一对点之间及其在 B 的像点间的无限接近的可能性. 主要之处还在于连续性引导出了映射的概念. (不要与第 6 章所说的同胚变换混淆，后者只是前者的一个例子.)① [186]

初级课本

第一页



看哪，这个女士掉到水里了！

她会游泳吗？

不会，但是她能浮起来——现在她出来了！

那些数字是干什么的？

它们是她头上不同的点——

为什么她在头上有点？

它们是被想象出来的：它们表示出她头的哪些部分碰出了漂亮的波纹. 瞧，这些波纹被编了号码.

为什么这些号码从外往回数？

因为那是它们出现的顺序. 首先她的头顶碰出了外圈的波纹，那是第一号.

---

① 译注：这里关于连续的说法是不妥当的，应是"开集的逆像为开"表示连续，即 $b \subset B$ 为开时 $f^{-1}(b) \subset A$ 为开，则称 f 为连续. 读者可参照其他任何一本拓扑或实变函数方面的书.

它怎么到了外圈?

它是第一个出发的. 然后她头上的圆圈做出了较小的波纹,把它再算进去.

我看不到她头上有什么圆圈.

它们也是被想象出来的. 当她的头浮出来时它就做出了……

这条鱼在干什么?

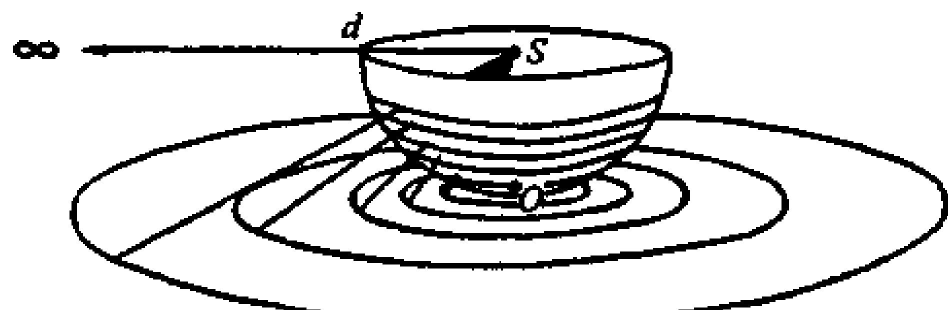
[187] 什么也不干.

映　射

即便是在通常意义下的相当欧几里得式的和几何的情形,一个映射与它的逆像也可能是非常地不相像.

正如前面刚刚给出的抽样页可以想象那样,如果我们把所有画在半球面上的同心圆用投影映射到一个平面上,则依我们把投射源点选取在哪里便可得到许多种不同的结果.

如果我们从图 27 的 S 画出投影线,同时这个半球如图中那样安放在平面上,这些圆则被投射到平面上并按在半球上那样逐渐地扩大,只是当它们与直径面越加靠近时,在平面上则按逆像的靠近比例越向外扩张,并且在 d 本身它们就到了无穷远处. 下面底部的圆越加靠近支撑点时,底点 O 将会接触到它的投影像. 另一方面,图 28 显示了当半球翻转过来时会发生的情形:直径圆与它的像重合,而当我们向上移动时,半球上的圆逐



[188] 图 27

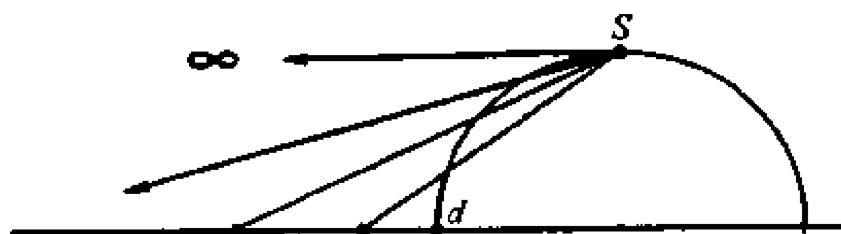


图 28

渐变小而它们的像则逐渐变大，而最高点的像是无限远处一个无穷大的圆. 这个投影所给出的结果多少有些像水中的女人，那里头顶上的点也变成一个圆，而这增大的半径与靠近其逆像的紧密程度成比例.

上述所有这些都是映射：称将一个集合中元素放置于另一个集合之中的任何一个协调一致的规则为一个映射，但要假定这个过程是连续的，1 对 1 的而且其逆也是 1 对 1 的；那怕它与几何投影无关也可以. 这里 1 对 1 表示 A 中每个点变成集合 B 中一个而且唯一的一个点①. 这个对其逆也成立，故而反向变换 f^{-1}将集合 B 中每个点带到 A 中一个且只有一个点. 这个对称而连续的函数是我们的老朋友同胚，它现在真正地被定义了. 【189】

一个图也是一种变换. 没有必要先熟悉解析几何再来了解什么是图；例如，一个温度表格就是一个图，它把时间的瞬间与（华氏）温度关联起来. 它从集合 T（时间）取元素（或选择元），并将它们与集合 F（华氏温度）中对应元联系起来. 在实际中护士并不是连续地读取温度，但是可以用一个温度记录器来完成这项工作，它在纸上画出一条曲线，那就是一个连续图. 我们可以更好地定义"图".

虽然这里涉及到的也是 2 维平面但靠近的概念即邻域与我们在 E^2（2 维空间）中曾用过的多少有点像圆盘的那种邻域有

① 译注：现在映射这个词所涵盖的范围要大得多，并不限于它和它的逆为 1 对 1 的情形.

些不同. 我们把集合 T 想成是单维空间，把集合 F 也想成是单维的，但各具可以比较的基准尺度，因为这种类型的图是两个 1 维集合的一个对照. 如果在一个点 p 附近画出两条任意的水平直线(图 29)，一条在 p 的上方，一条在下；如果我们能够在 p 的附近画两条竖直的直线，一条在 p 的左方，一条在右方，使它们之间不含有任何不被两水平线包含的点，则说此图在 p 点连
[190] 续. 用一个反例便能使这点更加易懂(图 30)，它展示了一个不连续的图，即有了一个空隙，而这个空隙在 x 方面并没有显出来(即在集合 x 方面没有空隙). 如果我们画出图中展现的那两条水平线，那么不管在 p 两侧的这两条竖直的线如何地靠近，p' 总被包含在其间，因为它就在 p 的垂直上方，而且这时 p' 不在两水平线之间. 可能会想到竖直的直线图，它与上述说法矛盾；但是这样的直线在拓扑函数中被当作特殊的，不正常的，这

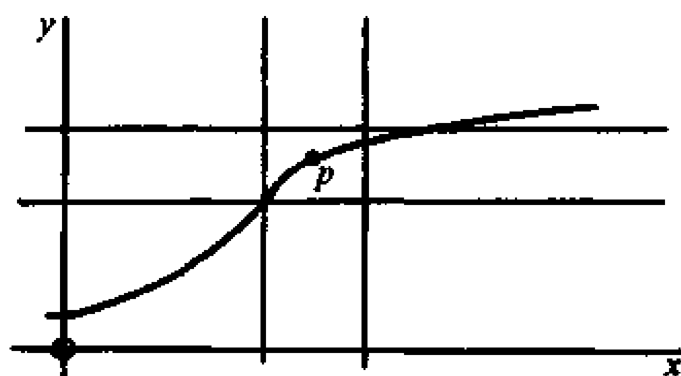


图 29

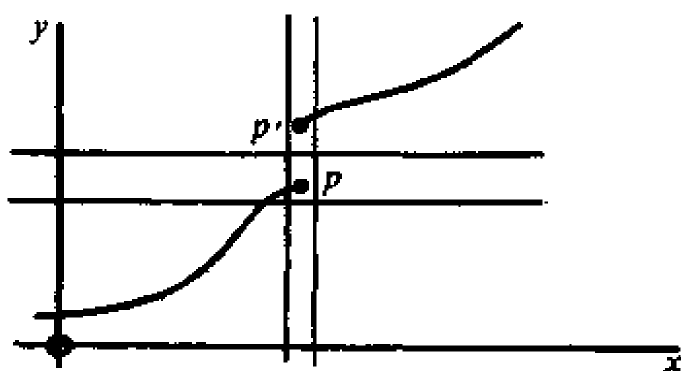


图 30

是由于它们引起了混乱并且破坏了定义——这是一种避免麻烦的不甚正规的方法，但却是有用而清晰的. [191]

上述相似于第196页上连续变换的定义，但是这里当把 p 看作集合 y 中一个元素时，它的邻域就是 y 轴上的一个空间 Ny，而当它看作集合 x 中的元素时它的邻域是个水平的空间 Nx. 如果有必要的话，这个关系可记作 $f(x)$，只要 f 被理解为这一类的图就可以了.

一个图，当它是连续且双向1对1的，则宁肯称之为映射. 它表示的不仅是集合 x 及像集合 y，而且还有用称为图形式表现的 x 和 y 的关系. 这种图是2维的，因为这两个相关集合的每一个都是1维的. 如果我们作出一个图画在移动时的图，它会具有维数3. 人们可以看到某些更加复杂的变换，它们会产生出完全画不出来的 n 维的图，譬如像在球面里面（不是上面）的点到一个立方体里面的变换的图是6维的.

同　伦

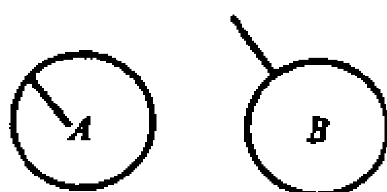
现在已较好地定义了"同胚". 它有一类函数式的伴随物，称为"同伦"，这个同伦不但详细说明了一个同胚变换存在的可 [192] 能性而且还说明了发生这种可能性的环境. 我们一直在说，任何一条闭曲线是可形变为任意另一条，即便如此，我们在将它们中第一条变到第二条的变换还是允许我们自己有点变通的余地，即切割并重新连接（图31）. 必须了解，有些情形下是不允许这样做的. 一旦我们对发生了这个变换的所在空间的类型给出



图 31

了详尽说明，我们就已经加上了一个新的条件．如果这条闭曲线是弦状的，并且我们引进了开空间，那么我们对它能做的事可能是局限在平面上的曲线按规则所不能做的．

确实，由一组规则我们可以在平面上把 A 变成 B（图 32），但只是因为并未提到这个平面就是实行操作的场所，这个平面被作了模糊和错误的假定，即图形是平面的；这就是全部了．在一个不同的情形（图 33），下面的说法则是有意义的：环面上的闭曲线 C 不能在环面上变换成 C'，但可以变换成 C''．如果曲线是电线做的或是想象的，我们把它们从环面上拉出来放在 E^3 中则无论怎样也不会出现上面的那种麻烦事．



[193] 图 32

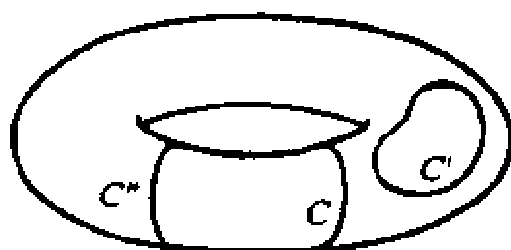


图 33

从前提到过的约当曲线定理可以用于环面上曲线 C' 的情形，但显然不能用到 C'' 或 C 的情形，因为它们不能分割开曲面．这时的判别的标准是，在环面上 C 和 C'' 不能连续地收缩成一个点，而 C' 却可以．这大都是这些图形所在空间的性质，较少地依赖于图形本身．现在我们可以说，在环面上两条像 C 和 C'' 的曲线是同伦，而它们中没有一条同伦于 C'．

变换本身，特别如果它是 C 到 C'' 中的映射（即图 34 中的阴



图 34 [194]

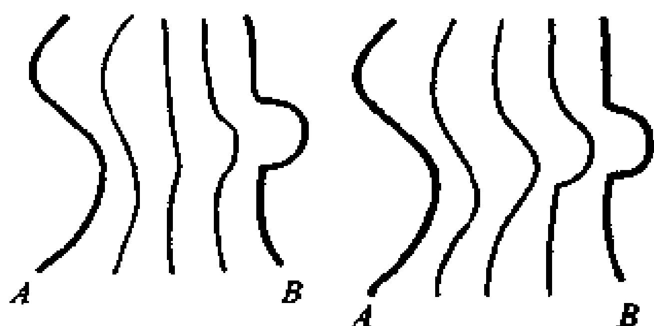


图 35

影部分)则它是 C 与 C'' 的同伦. 这个想法还可以进一步深入:所有中间的阶段都是相互同伦的. 在图 35 的两个多少更简单的情形中,我们可以看出一个给出的同伦并不是唯一的:事实上有无穷多个同伦能取得相同的结果,即把 A 变成 B.

比起是否存在一个映射这个一般性问题来仅仅选择一个特别的映射是不重要的. 对 C 到 C' 不存在任何同伦而对 C 到 C'' 则存在无穷多个. 所有这些似乎与我们最初的期望背道而驰,那时我们期待的是在关于拓扑学中什么是可行的,什么是不可行的一种绝对自由的状态. 然而正像我们前面所说的,重要的事是要知道何时要求精确,何时只要求可行. 虽然用于同伦的限制是一种随意的方式,它却容许在空间之间作进一步的区分,这是一类新的不变量.

另一个我们简短提及的判别标准是紧性. 它指的是一种完备的无限性:欧氏平面是不紧的,但是一个球面却是紧的,尽管 [195]
它有许多个点. 然而如果我们想要定义这些点集的紧性而又不涉及包围它们的空间,我们则可用这个定义:"称一个集合是紧

的是说它的每个无限子集均在集合本身里面有个极限点."

这个定义不完全像初次所见时的那样晦涩难懂. 读者可用最后这两章所说的东西用心地对自己解释一番.

第 129 页问题的答案如下:只有一个:j. 它被明确无误地定义成线 i 与 k 交于 a 的顶点. 但是 i,k 及它们的顶点 h 及 l 不能与它们对应的相配对,因为没法说清楚哪个点跑到哪个点
【196】去,除非是一种否定式的说法,例如说 k 对应的不是 h 的.

结　论

常常会发生这样的事，当你拿了一杯咖啡时却忘了加奶油．这时的窍门是，不要走过去取奶油而要把杯子拿过去．第一种方式牵涉到四次行走：走向奶油，把它拿到桌上，按原路送回，最后回到咖啡处．另一种方式则只涉及到两次：把杯子拿到冰箱那里，然后带着杯子返回．这不能用几何的办法作出有用的表示，而这种依顺序的设计使用的虽说是算术的，但却更可以说是属于拓扑学的．

在运用电子计算机时它被称之为程序，而点集拓扑学是它的基础．在设计这些计算机的令人胆怯的复杂线路时，他们利用了第 8 章所提到的网络分析．拓扑学也在天文学中找到了自己 [197] 的位置，实际上在许多其他需要数学的事业中也是如此．这些学科几乎都不是日常所需的，但我们却在许多日常琐事中运用了拓扑学，虽然常常是不自觉的．对某个东西在哪里的大多数的描述是拓扑的而很少是几何的：外套在壁橱里；学校在这条街与 32 街交叉处过去的第四幢房子里；我姑妈的笔在花园里．

海员使用几何，建筑工人也如此，但在通常的环境中也避免使用它，除非是航行距离的测量或厨房的测量．

文艺复兴时期标志着在科学的思维和方法上的许多变化，其中最好的范例是在化学方面．中世纪的炼金术集中精力在类别的差异上而在数量大小程度上的差异似乎很少被认为是本质的，但它们的化学却从来没有离开过基础的东西．以这种新的思

维方式，化学从定性的转向了定量的，从类别转到了程度上，从而它们开始从混乱走向了有序．另一方面，数学总是朝量化方法上倾斜，直到拓扑学的出现这个过程似乎才被扭转．

但是并非真正如此：重新往回翻翻这本书我们便能明白，一
[198] 旦形状或度量被暂时舍弃，它们又会以一种更加老练而隐蔽的伪装出现，因为性质也含有数量，类别也有程度，尽管它并不是用直尺来度量的．正如斯迭芬·文森特·贝奈(Stephen Vincent Benét)说过[他在谈到林肯(Lincoln)时]，如果你有场院要量的
[199] 话，直尺便是丈量的好东西．

附　录

第 32 页. 加德纳的解在于做奇数个长向对叠，即沿纸条的"长度"按直角叠向我们要粘合的边. 图 1 表示了这个安排. 如果折叠的次数是奇数，不管次数有多大，这两条端线总可以经过一个半扭转匹配到一起. 这是因为一个字母 N 颠倒之后仍是 N，而 M 则变了. 因此一条任意宽的纸带，只要假定纸张足够薄，就可以弯曲成一条充分窄的一条，足以让我们能方便地处理成一条成比例的麦比乌斯带，见图 2. 在第 3 章的所有工作之后出现

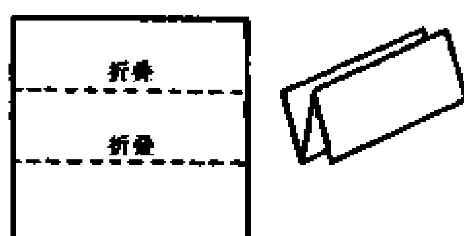


图 1

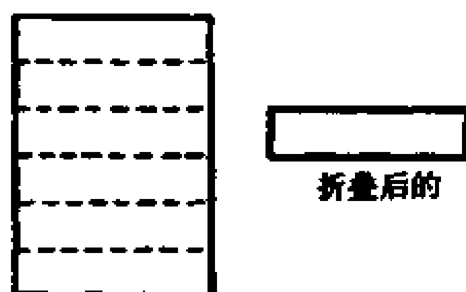


图 2

【200】

这样一个结果，不禁令人愤愤不已.

第 33 页. 在粘合纸带之前先如图 3 那样做上标记，这个图是缩小了的. 编了号的点是在$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{4}$的位置，而虚线表示了画在背面的. 当粘合时，这些线是直线且连续. 切割从 1 开始，然后按数字进行：在 5 之后当到达 x 时，此麦比乌斯带已经被打开，因而切割不得不继续沿直线进行. 似乎切割没有继续下去，然而直线是如此的.

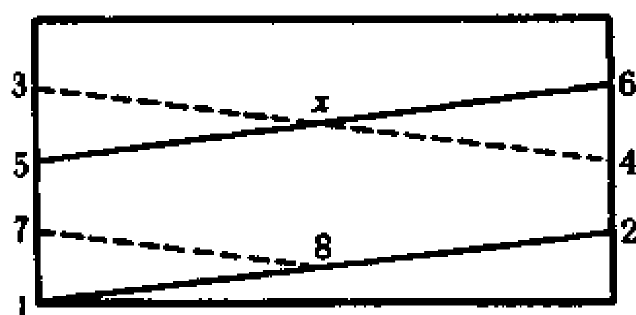


图 3

【201】 当到达 8 时此带便分开成等面积的两片，这可由计算图 4 中的三角形加以证实. 阴影部分是一片而没有阴影的部分是另一片；每片都含有 8. 第 33 页的图 15 及图 16 显示了一个也能把带子分成等面积两片的方法，但是其切割并不是从边缘上开始的. 它是在离边缘的$\frac{1}{4}$处.

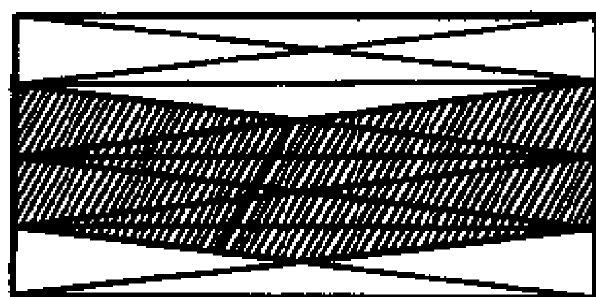
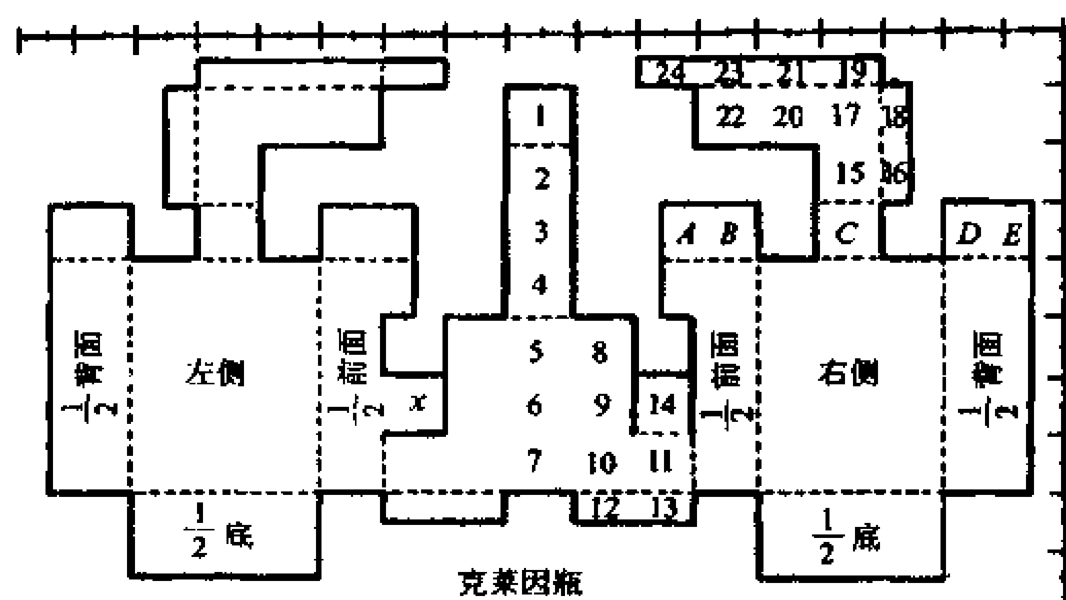
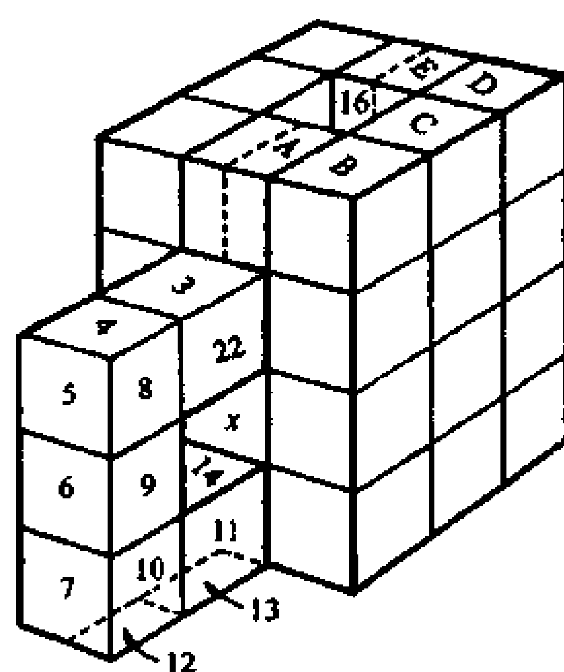


图 4



克莱因瓶



15—24 单元做成 $\frac{1}{2}$ 瓶颈

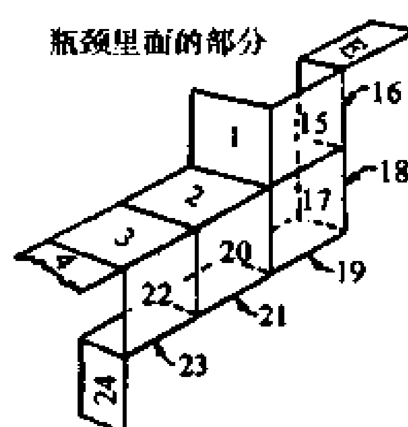


图 5

【203】

第 51 页. 图 5 展示出这个样型,最好画在一张厚的方格纸上,每个格子单位大约 1 英寸半. 实线用以切割而虚线用来折叠. 频繁出现的半个单位是由于此模型作得相当对称,但要除去第 14 号单元及其相对的 x 号. 旁边透视图上有相同的号码及字母单元,从而在切割之后它是进行折叠的一张指导图. 粘合不
【202】是重叠而是相邻接的,故而要用胶带才行.

第 85 页. 将$\frac{1}{3}$的红色与所有的蓝色混合起来得到了紫色,它足够油漆 16 平方英尺. 图 6 展示了涂色方案.

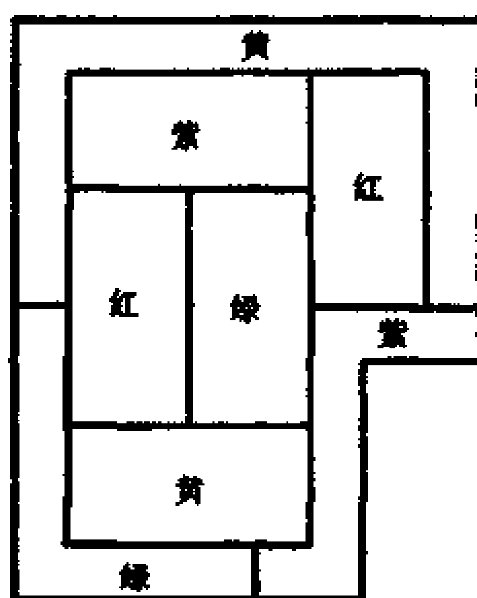


图 6

第 94 页. 此级数是两个级数的组合,但它归结为一个公式:设 n 是在最终切割前的部分切割,分成的片数是 2^n+1:(3, 5, 9, 17 等等).

第 113 页. 构出图 7.

图 7 此人前进的每一次是前一次路程的一半

画出直线 1—2,2—3 及 3—4,使 2 和 3 为直角. 连接 1 与 3,2 与 4,则交点 C 就是所求的极限点. [204]

证明.

添加直线 4—5 及 5—6,使 4 和 5 都为直角.

直线 1—2 是 2—3 的两倍,2—3 是 3—4 的两倍;

∴三角形 1—2—3 与 2—3—4 相似.

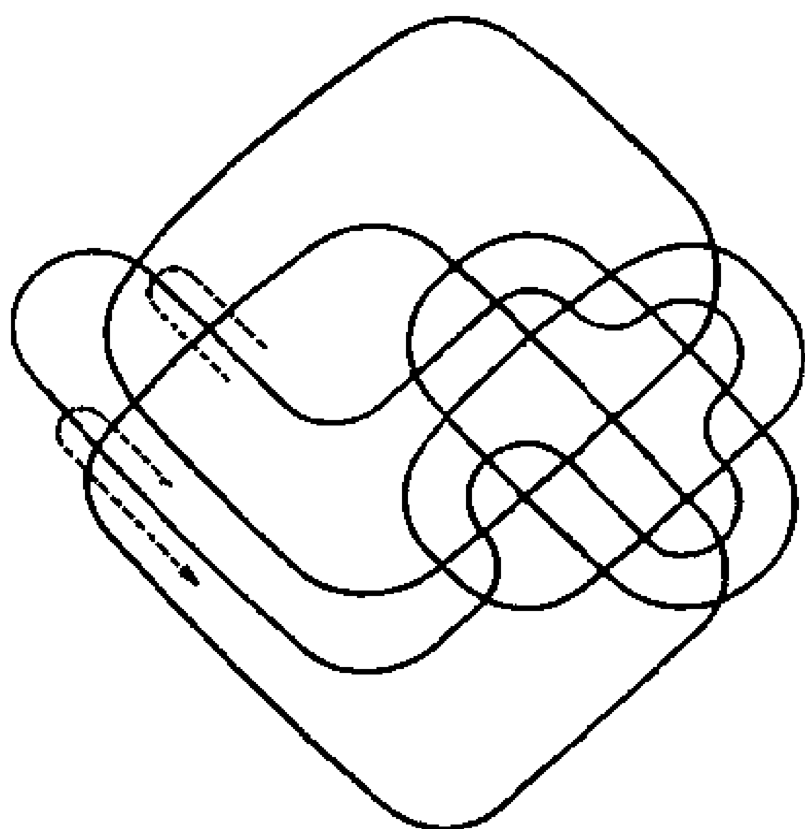
$\therefore \angle\alpha = \angle\alpha'$, $\angle\beta = \angle\beta'$.

∴三角形 2—3—C 相似于三角形 1—2—3;

∴在 C 的角都为直角.

所有下列的后续的直角三角形都是相似的:1—2—C, 2—3—C, 3—4—C,4—5—C 等等,而它们的斜边,由于是逐次减半,便构成了此人被要求采取的路径. 证完. [205]

第 123 页. 图 8 是关于 5 个集合的图. 虚线表示开始作第 6 个时在第 5 个的边界附近的情形. 任意多个集合的情形都可按这种方式作出来, 每次都沿着前面最后一个的边界进行.



[206]

图 8

索　引

（译名后的数码为原书页码）

Achilles and the Tortoise　阿喀琉斯与乌龟　158－159
Alexandroff, Paul　保尔·阿历克山德罗夫　20－21
annulus　圆环　31－32
　Möbius strip from　由～做成麦比乌斯带　52－53
Betti, Enrico　恩里柯·贝蒂　124
Betti numbers　贝蒂数　123－128
Bolzano－Weierstrass theorem　波尔查诺－魏尔斯特拉斯定理　180－181
boundary points　边界点　176
closed sets　闭集　151,174－178
　defined　定义～　175－176
closures of sets　集合的闭包　178
compact sets　紧集　195－196
compactness　紧性　195－196
complement of set　集合的补集　171
connectedness　连通　4－5
connectivity　连通性　21
continuity　连续性　2, 149－154
　and discreteness　～与离散　149－154
　of a line, defined　定义直线的～　152
　of transformations　变换的～　186
continuum　连续统　154
cross-caps　交叉帽　79, 81－82, 90－91, 102－103, 105, 127
cross-cuts　横切　124－128
cruciform models　十字形模型　51, 91－94, 105
cylinder, paper model of　圆柱，纸模型的～　22－23
denumerability　可数（可被编号）　152－154
dimensions　维数　28－30
discreteness　离散　149－154
disjoint sets　不交集　165,171
distortion　扭曲，形变　5, 7, 9,（参见homeomorphism）
domains　区域　178
duality　对偶性
　of cross-cuts　横切口的～　128
　of loop-cuts　圈形切口的～　128
duals of maps　对偶（地）图　114－118
epsilon　ε　155
Euclidean geometry　欧氏（欧几里得）几

何 162
Euclidean spaces 欧氏(欧几里得)空间 174-181
Euler, Leonhard 伦纳德·欧拉 10, 121
Euler's theorem 欧拉定理 10-19, 123-124
proof of ~的证明 10-17
on a torus 环面的~ 18
four-color map problem 四色问题 109-119
functions 函数 182-187
Gardner, Martin, solution of shortest Möbius strip 最短麦比乌斯带的加德纳解 48
Gardner model 加德纳模型 84-107
glove, inversion of 翻转的手套 141-143
graphs 图 190-192
discontinuous 不连续图 191
homeomorphism 同胚 8-9, 192
defined 定义~ 189
in distortion of Klein bottle 在克莱因瓶形变中的~ 67
homotopy 同伦 192-196
images 像 183-187
infinite sets 无限集 180-182
inner tube, inversion of 翻转的内胎 136
intersection of sets 集合的交 165-171
intuition 直观 21
invariants, topological 拓扑不变 5, 128, 163
inversion 翻转
of glove 手套的~ 141-143
of inner tube (punctured torus) 内胎的(带孔环面的)~ 136-148
irrational numbers 无理数 152, 154
Jordan curves 约当曲线 7-8, 17
Jordan curve theorem 约当曲线定理 108, 194
Klein bottle 克莱因瓶 34-38
non-orientability of ~的不可定向性 63
paper models of ~的纸模型 62-77
Slipped-disk 腰尖盘突出的~ 75
symmetrical 对称的~ 66-67
knots 纽结 132-134
in cut Möbius strip 切割麦比乌斯带中的~ 97-100
Koenigsberg Bridges, the 哥尼斯堡桥 120-122
Lefschetz, S. S·莱夫谢茨 128
left vs right 左与右 134-135
limit points 极限点 158-161, 179-181
linkedness 链接 133-134, 145-148
loop-cuts 圈形切口 126-128
map coloring 地图着色 108-118
game ~游戏 118
on a Möbius strip 麦比乌斯带上的~ 111
on a torus 环面上的~ 110-111
mappings 映射 186, 188-189, 192
maps 地图

duals of 对偶～ 114－118
regular 正规～ 113－118
maxima and minima 极大和极小 150－151，155，156
metric spaces 度量空间 155－156，174－181
minima and maxima 极小和极大 150－151，155，156
Möbius strip 麦比乌斯带 23－25
annular 圆环的～ 52－53
conical 圆锥～ 50－61
knot in edge of ～边缘的纽结 133
map coloring on 在～上地图着色 111
non-orientability of ～的不可定向性 27—28
the shortest 最短～ 40－48
square 正方形～ 43－46
symmetrical 对称的～ 89
number of twists in 在～中的扭转数 82－107
wire-and-rubber model 电线和橡皮模型的～ 80－82
neighborhoods 邻域 146，154－158，176－177，192
networks 网络 120－123
"Next Number，" the "下一个数" 149－150
next point，the 下一个点 157
null sets 空集 167
open sets 开集 157，174－178，186
defined 定义～ 175
orientability 可定向性 25－28
not in Klein bottle 克莱因瓶的不～ 63
paper models 纸模型
advantages of，and objections to ～的好处及反对意见 21－23
of cylinder 圆柱的～ 22－23
of Klein bottle 克莱因瓶的～ 62－77
of Möbius strip 麦比乌斯带的～ 23－25
of projective plane 射影平面的～ 78－79（参见 Gardner model）
of torus 环面的～ 22－23
pi π 29
polyhedra 多面体 10－12，18
problems 问题 49，118，122，128，133，160，166，184
Programing 程序 197
projections 投影 188－189
projective geometry 射影几何 3
projective plane 射影平面 34，78－82，91
Gardner model of ～的加德纳模型 84－107
punctured torus，inversion of 带孔环面的翻转 136－148
puzzles，*see* problems 难题，见 problems
rational numbers 有理数 151－154
real numbers 实数 152，154，158，179，180
regular maps 正规(地)图 113－118
right vs left 右与左 134－135
Russell，Bertrand 伯特兰·罗素 162
sense，rotational 旋转的指向 35－36

series 级数 128－131
sets 集合 162－186，190－192
closed 闭～ 151，174－178
defined 定义闭～ 175－176
closures of ～的闭包 178
compact 紧～ 195－196
complement of ～的补 171
disjoint 不交的～ 165，171
infinite 无限～ 180－182
intersection of ～相交 165－171
limit points of ～的极限点 179－181
null 空～ 167
open 开～ 157，174－178，186
defined 定义开～ 175
subsets 的子集 164，171
sum of ～的和 166－171，172
union of ～的并 172
shortest Möbius strip 最短麦比乌斯带 40－48
Gardner's solution of ～的加德纳解 48
sides，how many 面，多少个～ 25－28
simply connected 单连通的 5－6，7，31
Slipped-disk Klein bottle 腰尖盘突出的克莱因瓶 72－75
spaces 空间
Euclidean 欧氏～ 174－181
metric 度量～ 155－156，174－181
topological 拓扑～ 2
subsets 子集 164，171
sum of sets 集合的和 166－171，172
symmetry 对称性 82－107
three-color problem，the 三色问题 112
tiling theorem 铺砖定理 108－109，154－155
topological invariants 拓扑不变 5，128，163
topological spaces 拓扑空间 2
topology 拓扑(学)
defined 定义～ 1－4
modern uses of ～的现代运用 197，198
torus 环面 5，7－8，31
map coloring on 在～上地图着色 110－111
paper model of ～的纸模型 22－23
transformations 变换 182－187
traverse，law of 穿越规律 122
trees 树 123
true vs valid 真理与逻辑真实 162－163
twists，number of，in Möbius strip 麦比乌斯带的扭转数 82－107
union，*see* sum of sets 并，见 sum of sets
valid vs true 逻辑真实与真理 162－163
Venn diagrams 维恩图 164－173

关于本书

“有个数学家叫克莱因，
以为麦比乌斯带是神予.
他说：‘如果你把两边粘，
就会像我那样得到神秘的瓶.’”

在这本生动的，它所属领域中堪称经典的书中，一个趣味拓扑的大师邀请读者们通过克莱因瓶和麦比乌斯带大胆进入像连续性和连通性这样的引人入胜的拓扑王国.

在引进了拓扑学定义并讨论了欧拉定理之后，巴尔先生把风趣和清晰带到了书中其他的专题.

用这本书和一方纸读者可以一步步地做出个纸的克莱因瓶，再由交叉或切割此瓶，做出麦比乌斯带.圆锥麦比乌斯带，地图着色的原理，哥尼斯堡桥的经典问题及其他拓扑学的方方面面都被作者以非正规的、娱乐式的方法给予了仔细而简明的阐述.